

Tesis de Posgrado

Vacíos cuánticos no convencionales

Ferraro, Rafael

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Ferraro, Rafael. (1986). Vacíos cuánticos no convencionales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1942_Ferraro.pdf

Cita tipo Chicago:

Ferraro, Rafael. "Vacíos cuánticos no convencionales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1986.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1942_Ferraro.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

VACIOS CUANTICOS NO CONVENCIONALES

Autor: Rafael Ferraro

Director: Mario A. Castagnino

Lugar de trabajo: Departamento de Matemática de la
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA)
(Becario del Consejo Nacional
de Investigaciones Científicas y Técnicas)

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

-1986-

1942 -
E. 2

INDICE

RESUMEN.....	2
1. INTRODUCCION	
1.1 Marco histórico.....	3
1.2 El estado actual de la Teoría de Campos en espacios curvos.....	7
1.3 Campos cuantificados en presencia de espejos.....	10
1.4 Plan de la Tesis.....	13
2. CUANTIFICACION DEL CAMPO	
2.1 Ambigüedad en la elección del vacío.....	17
2.2 Los vacíos de Minkowski y de Rindler.....	24
2.3 Sistemas de referencia.....	34
2.4 Caracterización del sistema de observadores.....	37
2.5 El operador Hamiltoniano.....	40
2.6 El vacío dependiente de los observadores.....	44
2.7 Datos de Cauchy para la base $\{u_k\} \cup \{u_k^*\}$	46
2.8 Ejemplos.....	54
3. COSMOLOGIA DE JUGUETE	
3.1 Espejos móviles: un análogo cosmológico.....	63
3.2 La cuantificación del campo.....	65
3.3 La ecuación dinámica para los espejos.....	71
3.4 Técnicas numéricas.....	77
3.5 Principales resultados.....	82
3.6 La energía de Casimir para espejos móviles.....	89
3.7 El origen de los espectros no térmicos.....	96
4. CONCLUSIONES.....	109
APENDICE A.....	115
APENDICE B.....	118
REFERENCIAS.....	122
AGRADECIMIENTOS.....	128

RESUMEN

La ambigüedad de la cuantificación de un campo en un espacio-tiempo curvo arbitrario, se resuelve introduciendo una noción de vacío cuántico dependiente de los observadores. Para ello se establece que el papel de un sistema de referencia en Relatividad General, consiste en determinar qué es el espacio y qué es el tiempo, nociones éstas que resultan dependientes de los observadores. Como los detectores de campo son sensibles a la diferencia entre espacio y tiempo, resulta natural que el vacío cuántico dependa de los observadores. Para saber qué vacío corresponde a cada sistema de observadores, se define un Hamiltoniano invariante frente a cambio de coordenadas pero dependiente de los observadores. La base de soluciones de la ecuación de campo, que un dado sistema de observadores debe utilizar para cuantificar el campo, es aquella que diagonaliza el Hamiltoniano y minimiza la energía del vacío, criterios éstos que resultan ser equivalentes; los datos de Cauchy que la determinan son calculados cuando el tiempo se separa en la ecuación de campo. Esta prescripción para definir el vacío es de aplicación general, y contiene diferentes casos particulares en donde la noción de vacío estaba bien establecida. Por otra parte, se demuestra la invariancia conforme del Hamiltoniano definido.

Se estudia también, mediante cálculo numérico, la evolución de un sistema de espejos solicitados por la fuerza ejercida por un campo cuantificado escalar sin masa, en un espacio-tiempo plano. El sistema presenta fuertes analogías con un modelo cosmológico semiclásico. La fuerza de un campo sobre una superficie móvil es determinada mediante un principio variacional. Se encuentra que los espejos evolucionan hacia un estado final de velocidad constante, siempre que el sistema posea energía suficiente. Se calcula la energía de Casimir (dependiente de la velocidad de los espejos) percibida por observadores geodésicos en la etapa final de la evolución, y se estudian las razones por las cuales el espectro de partículas creadas por un espejo móvil podría ser no térmico.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 MARCO HISTORICO

Desde que en 1915 A.Einstein [1] presentó la Relatividad General, donde se interpreta a la gravitación como una manifestación de la geometría del espacio-tiempo, la Física cuenta con una importante herramienta para atacar el problema cosmológico. La ecuación de Einstein:

$$(1.1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

enseña de que manera la distribución de energía-materia en el universo, actúa como fuente de la geometría. El primer intento de extraer resultados de (1.1) con interés cosmológico, se debió al propio Einstein [2], quien supuso al universo lleno de un fluido

homogéneo e isótropo (naturalmente esta hipótesis sólo tiene sentido a escala cosmológica). Usando el tensor de energía-momento de este fluido como fuente en (1.1), Einstein obtuvo, para su sorpresa, que una geometría estática sólo sería posible si el fluido poseyera propiedades físicamente poco razonables. Por esa época no existían evidencias para pensar en una geometría dependiente del tiempo, de manera que Einstein decidió modificar su ecuación agregando el término $\Lambda g_{\mu\nu}$ al primer miembro de (1.1) (Λ fue llamada 'constante cosmológica'). Así pudo obtener soluciones estáticas con un fluido razonable (Posteriormente Einstein diría que ése fue el desatino más grande de su vida).

También en 1917 W. de Sitter [3,4] estudió otra posible solución estática de la ecuación de Einstein. En 1923 H.Weyl [5] demostró que dos partículas de prueba en el universo de de Sitter se separan a una velocidad proporcional a su distancia.

A.Friedmann en 1922 [6] y G.Lemaître en 1927 [7] estudiaron modelos de universo isótropos y homogéneos que evolucionaban en el tiempo.

En 1929 E.P.Hubble [8] determinó que el corrimiento Doppler de la luz proveniente de las galaxias lejanas, indicaba una relación lineal entre las distancias a la que se encuentran las galaxias y las velocidades con que se alejan de nosotros. En su trabajo Hubble dice: 'el aspecto notable, sin embargo, es la posibilidad de que la relación distancia-velocidad pueda representar el efecto de Sitter, y por lo tanto los datos numéricos puedan ser introducidos en las discusiones sobre la curvatura general del espacio'.

En 1935-36 H.F. Robertson [9-11] y A.G. Walker [12] independientemente, demostraron que el intervalo usado por Lemaître (ver (2.81)) era el más general, en una geometría riemanniana compatible con el Principio Cosmológico ('el universo es, a gran escala, isótropo y homogéneo').

Por otra parte, se encontró que era posible escribir el intervalo del universo de de Sitter en la forma (2.81), haciendo un cambio de coordenadas conveniente.

Los trabajos mencionados fueron los pilares para la confección de un modelo cosmológico que hoy se conoce con el nombre de 'modelo standard de la gran explosión (big-bang)'. En las referencias [13-16] puede encontrarse buenas revisiones del modelo. Este modelo contiene el Principio Cosmológico y es capaz de explicar el corrimiento al rojo de la luz proveniente de las galaxias lejanas y el origen de la radiación de fondo de 2,7°K descubierta en 1965 [17] (según el modelo, se trata de una reliquia, corrida al rojo, de la radiación proveniente de la época en que se desacopló la materia de la radiación). La reconstrucción de la historia térmica del universo, de acuerdo con este modelo, predice que en la época de la nucleosíntesis, el 27% (en peso) de los nucleones se habría fusionado en He^4 [18,19]; de manera que la determinación de la abundancia relativa de He^4 en el universo constituye un test del modelo del 'big-bang' (una actualización del tema puede encontrarse en la ref. [20]).

Otra predicción del modelo consiste en que si el universo es cerrado, la expansión se detendrá para comenzar una etapa de contracción. El dato observacional que permite conocer si el

universo es cerrado (esférico) o abierto (ya sea plano o hiperbólico) es la densidad media de materia y radiación. Este dato no se conoce con la suficiente precisión como para resolver la cuestión.

A pesar de los éxitos obtenidos, el modelo standard presenta algunos aspectos insatisfactorios. Por ejemplo, existen en el modelo regiones del universo causalmente desconectadas. El modelo no es capaz de explicar por qué, a pesar de ello, no se viola el Principio Cosmológico de homogeneidad e isotropía. Para perfeccionar el modelo, los cosmólogos han pensado en tratar a la materia no ya como un fluido ideal sino en términos de campos cuantificados. En efecto, es bien sabido que, a las energías que habrían estado en juego en el universo primitivo, resulta necesaria una Teoría Cuántica de Campos para describir el comportamiento de la materia y la radiación. Un reciente artículo de revisión sobre los avances realizados en este sentido es [21]. Sin embargo, en estos novedosos "modelos de universo inflacionario" [22-25] se utilizan resultados de la Teoría Cuántica de Campos en el espacio-tiempo plano, sin preocuparse demasiado por la confiabilidad de estos resultados en un espacio-tiempo que es curvo.

En realidad, un modelo cosmológico serio requiere de la formulación de una Teoría Cuántica de Campos en el espacio-tiempo curvo. Los primeros pasos en esta dirección se dieron a fines de los años 60. En esa época aparecieron trabajos sobre la cuantificación de un campo en ciertos modelos de universo que poseían un grupo de transformaciones que los dejaban invariantes

[26-28]. En 1969 L.Parker [29] publicó un trabajo sobre creación de partículas en un universo en expansión.

1.2 EL ESTADO ACTUAL DE LA TEORIA DE CAMPOS EN ESPACIOS CURVOS

Sin embargo, la cuantificación del campo en un espacio-tiempo curvo cualquiera dista de estar resuelta. La razón consiste en que es muy sencillo generalizar al espacio curvo nociones y relaciones locales (por ejemplo, un tensor del plano se generaliza como un tensor del espacio curvo; una ecuación diferencial del plano se generaliza reemplazando derivadas ordinarias por derivadas covariantes), pero no es inmediata la generalización de nociones globales. La noción de partícula en el espacio-tiempo plano está asociada a las ondas planas que resuelven la ecuación de campo. En el espacio-tiempo curvo no hay ondas planas, de manera que la cuantificación se torna ambigua, salvo que alguna simetría nos ayude a elegir por cuál solución sustituir la onda plana [30].

Aún resolviendo la forma en que debe cuantificarse el campo, todavía aparece otra dificultad: los valores de expectación de observables como el tensor de energía-momento son divergentes. Los métodos para tratar estas divergencias y obtener de la teoría resultados con significado físico son diversos. Para una revisión de este tema ver ref.[31].

El estado actual de la Teoría Cuántica de Campos en el

espacio-tiempo curvo puede examinarse en [32]. Otro artículo importante, pero anterior, es [33].

Para realizar un modelo cosmológico que trate a la materia y a la radiación como campos cuantificados, debemos resolver los problemas que enfrenta la Teoría Cuántica de Campos en el espacio-tiempo curvo. Además debemos conocer cuáles son los campos y las interacciones que describen correctamente el comportamiento de las partículas elementales, a las energías que éstas poseían en el universo primitivo; éste es un tema de trabajo para los físicos de partículas elementales (un artículo de revisión es la ref.[34]). Luego habría que construir el tensor de energía-momento correspondiente a esos campos con esas interacciones, y usarlo como fuente de la ecuación (1.1), habida cuenta de que los propios campos deben satisfacer ecuaciones de campo, en donde aparece la métrica a través, por ejemplo, de las derivadas covariantes.

Sin embargo un nuevo problema ha aparecido. Como los campos están cuantificados, el tensor de energía-momento es ahora un operador. Por lo tanto la ecuación (1.1) igualaría números con operadores! Claro, el problema se debe a que cuantificamos los campos de materia y radiación, pero no cuantificamos el campo gravitatorio (es decir, la geometría). Hasta el momento no existe una teoría sólidamente basada, sobre la cuantificación del campo gravitatorio. Sin embargo se cree que, dentro de ciertos límites, es posible trabajar con una teoría "semiclásica" (en el sentido que la geometría queda sin cuantificar). Esta sería una aproximación similar a la utilizada en los primeros tiempos de la

Teoría Cuántica, cuando se obtuvieron buenos resultados considerando que un campo electromagnético clásico interactuaba con materia cuantificada. Para llevar a la práctica una aproximación semiclásica, el miembro derecho de la ecuación (1.1) debería interpretarse como el valor de expectación del operador $T_{\mu\nu}$ en el estado cuántico en que se hallen los campos cuantificados. Se cree que tal aproximación es válida en regiones del espacio-tiempo que verifiquen:

$$(1.2) \quad \text{Max} \left(|R^{\mu\nu}_{\rho\lambda}| \right) < \frac{c^3}{16\pi G \hbar} \equiv l_p^{-2}$$

donde l_p es conocida como "longitud de Planck", siendo la única cantidad con dimensiones de longitud que se puede construir con las tres constantes físicas que deberían intervenir en una teoría cuántica relativista de la gravitación. Ese simple argumento dimensional suele ser invocado por sí solo para caracterizar el límite de validez de la Teoría Cuántica de Campos en el espacio-tiempo curvo.

De acuerdo con lo visto, para estudiar un modelo cosmológico deberíamos resolver un sistema de ecuaciones acopladas: la ecuación (1.1) (considerando el miembro derecho como valor de expectación) y las ecuaciones dinámicas de los campos intervinientes.

Para comenzar, un ejercicio útil sería considerar un único campo libre. A pesar de la aparente sencillez de este problema, su resolución es verdaderamente dificultosa, debido al acople de

ecuaciones. El acople se debe a que, si bien el campo es libre, en el sentido que no interactúa con ningún otro campo ni con sí mismo, sí interactúa con la geometría. Esta interacción provoca la creación de cuantos de campo, los cuales aparecen contribuyendo al $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Hasta el momento, los trabajos existentes resuelven la ecuación semiclásica (1.1) en casos donde no se crean cuantos [35,36].

Una forma de trabajo alternativa consiste en reemplazar el problema por otro similar, como veremos en la sección siguiente.

1.3 CAMPOS CUANTIFICADOS EN PRESENCIA DE ESPEJOS

En 1948 H.B.G. Casimir [37] encontró que las fluctuaciones cuánticas de un campo electromagnético confinado entre dos placas conductoras descargadas planas y paralelas, originan entre las mismas una fuerza de atracción. El fenómeno admite, como veremos, una descripción microscópica y una macroscópica.

Ya en 1930 F. London había aplicado la teoría de perturbaciones de la Mecánica Cuántica a la interacción dipolar entre átomos [38,39].

En 1954 E.M. Lifshitz calculó la fuerza entre dos cuerpos dieléctricos plano-paralelos, debida a las fluctuaciones cuánticas del campo electromagnético; suponiendo que la distancia entre los dieléctricos es grande comparada con la distancia interatómica, utilizó una aproximación macroscópica (la fuerza resultaba de

considerar la componente $x-x$ del tensor de Maxwell). Luego estudió dos casos límites: cuando la distancia entre dieléctricos es mucho menor y mucho mayor que las longitudes de onda típicas de los espectros de absorción de los cuerpos. En el primer caso, Lifshitz reprodujo los resultados de London considerando que los cuerpos estaban rarificados. En el segundo caso, Lifshitz reprodujo el resultado de Casimir considerando el límite de cuerpos perfectamente conductores. [40,41]. La validez del resultado de Casimir ha sido confirmada experimentalmente [42-47].

Desde el punto de vista de la Teoría Cuántica de Campos, no interesan las propiedades dieléctricas de las placas. Se supone que las placas son superficies matemáticas que imponen condiciones de contorno al campo, las cuales restringen el espectro de longitudes de onda (cuando las condiciones de contorno son de reflexión total, llamamos "espejos" a las superficies). Luego se calcula el valor de expectación de vacío del tensor de energía-momento del campo. Se obtiene que, a pesar del resultado divergente, una variación en la separación de las placas produce un cambio finito del mismo. Así, si asignamos el valor cero cuando las placas están infinitamente separadas, obtenemos que, para un campo electromagnético:

$$(1.3) \quad \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle = \frac{\hbar c \pi^2}{720 d^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde d es la distancia entre las placas. Para un campo escalar la expresión debe dividirse por 2 [48-53].

Tiempo despues la investigación se orientó hacia los sistemas formados por campos cuantificados en presencia de espejos móviles. La novedad que estos sistemas ofrecían, era que los espejos móviles modificaban el contenido de partículas del estado cuántico en que se encontraba el campo. Los trabajos publicados estudian el flujo de radiación de partículas creadas, para movimientos dados. La mayoría de estos trabajos se desarrollan en un espacio-tiempo bidimensional y plano, donde hay un único espejo (un punto, en este caso) y un campo escalar sin masa [31,54-58]. Otros trabajos utilizan un par de espejos en un espacio-tiempo bidimensional y plano con campo no masivo [54,59-61]. Finalmente, existen pocos ejemplos en cuatro dimensiones [62-66].

Los espejos móviles crean partículas, las cuales reaccionan sobre ellos ejerciendoles presión. En este sentido, el sistema es análogo a un modelo cosmológico, donde el universo en expansión crea partículas que reaccionan sobre la geometría apareciendo como fuente en la ecuación de Einstein. Por lo tanto, podemos concebir al sistema formado por dos espejos móviles en presencia de un campo cuantificado, como un simil cosmológico "de juguete". El estudio de este sistema presenta menos dificultades que el de los modelos cosmológicos tratados en la sección anterior y puede considerarse como un primer paso en el desarrollo de métodos de ataque a estas cuestiones.

1.4 PLAN DE LA TESIS

En el Capítulo 2 se aborda el tema de la cuantificación de un campo en el espacio-tiempo curvo. Como dijimos en la sección 1.2, uno de los dos grandes problemas que enfrenta la formulación de una Teoría Cuántica de Campos en el espacio-tiempo curvo es la difícil generalización de la noción de partícula al caso curvo. Esto produce ambigüedades en la cuantificación del campo. El objetivo del Capítulo 2 es resolver esas ambigüedades. Para ello se toma una idea que ya W. Unruh utilizó en el caso plano: la noción de vacío (la contracara de la noción de partícula) es dependiente del observador [67]. De esta forma la ambigüedad en la elección del estado cuántico de vacío, no sería más que el reflejo de que a cada sistema de observadores corresponde una diferente noción de vacío. Para llevar a la práctica esta idea habrá que consolidar la noción de sistema de observadores en Relatividad General y prescribir cómo cuantifica el campo cada sistema de observadores.

En la sección 2.1 se revisa el problema de la ambigüedad en la elección del estado de vacío.

En la sección 2.2 se revisa el ejemplo de Unruh, quien muestra que si consideramos en el espacio-tiempo plano las coordenadas de Minkowski (cartesianas) por un lado y las de Rindler por el otro, entonces se inducen dos cuantificaciones diferentes. Unruh demuestra que un detector de partículas inercial no se activa cuando el campo está en el estado de vacío de la primera de las cuantificaciones, mientras que si el mismo detector está uniformemente acelerado entonces no se activa cuando el campo está

en el estado de vacío de la segunda de las cuantificaciones. Así, la noción de vacío resulta dependiente del observador.

En la sección 2.3 se revisa la noción de sistema de referencia en Relatividad General y se estudia cuál es el papel jugado por éste. El sistema de referencia determina las nociones de espacio y tiempo asociada al conjunto de observadores fijos a él. Como los detectores son sensibles a la distinción entre espacio y tiempo, la noción de vacío debe ser diferente en distintos sistemas de referencia.

En la sección 2.4 se dan las herramientas matemáticas que sirven para caracterizar un sistema de referencia.

En la sección 2.5 se define un operador Hamiltoniano invariante frente a cambio de coordenadas pero dependiente del sistema de referencia.

En la sección 2.6 se utiliza este Hamiltoniano para prescribir cuál es el estado de vacío que corresponde a un dado sistema de referencia en una dada geometría. La receta se basa en que el Hamiltoniano sea diagonalizado y su valor de expectación de vacío sea minimizado. La diagonalización del Hamiltoniano, como herramienta para definir el vacío, ha sido utilizada ya por distintos autores [68-77]. Sin embargo nunca se incluyó a los observadores en la definición del Hamiltoniano y siempre se trabajó en universos particulares. La diagonalización también ha sido criticada [78], pero con poco fundamento, a nuestro entender. En la sección 2.7 se encuentra la base de soluciones de la ecuación de campo que un dado sistema de observadores debe utilizar para cuantificar el campo, de acuerdo con el criterio de la sección anterior.

En la sección 2.8 se aplica nuestra prescripción general a casos particulares en donde la noción de vacío, por distintas razones, está suficientemente bien establecida. En esos casos se muestra que nuestro vacío coincide con los vacíos conocidos. Además se realiza una demostración de la invariancia conforme del Hamiltoniano definido en la sección 2.5.

En el Capítulo 3 se utilizan los resultados del Capítulo 2 para estudiar, mediante métodos numéricos, una "Cosmología de Juguete". Esta consiste en un sistema de dos espejos móviles solicitados por la fuerza ejercida por un campo escalar sin masa cuantificado, en un espacio-tiempo bidimensional y plano.

En la sección 3.1 se expone la analogía que tiene el sistema con un modelo cosmológico.

En la sección 3.2 se realiza la cuantificación del campo dependiente de los observadores.

En la sección 3.3 se resuelve el problema de conocer cómo es la fuerza que un campo ejerce sobre una superficie móvil.

En la sección 3.4 se resume el método de cálculo numérico.

En la sección 3.5 se presentan los resultados del programa de cálculo, obteniéndose que los espejos alcanzan un estado final con velocidad constante, siempre que el sistema cuente con una energía suficiente.

En la sección 3.6 se encuentra la energía de Casimir (dependiente de la velocidad de los espejos), percibida por observadores geodésicos en la región final.

En la sección 3.7 se estudia la razón por la cual el espectro de las partículas creadas por espejos móviles puede ser no térmico,

encontrándose una relación con ciertas singularidades del movimiento de los mismos.

En el Capítulo 4 se resumen las contribuciones originales de esta Tesis.

En el Apéndice A se revisan los tensores que caracterizan a un fluido en Relatividad General.

En el Apéndice B se diseña un método simple que permite resolver gráficamente la ecuación que gobierna la evolución del campo en presencia de espejos móviles.

CAPITULO 2

CUANTIFICACION DEL CAMPO

2.1 AMBIGUEDAD EN LA DEFINICION DE VACIO

Consideremos un campo escalar real $\phi(x)$ con masa m . La ecuación de campo, que gobierna la dinámica de $\phi(x)$, es la ecuación de Klein-Gordon, generalizada a una geometría curva cualquiera:

$$(2.1) \quad (\square + m^2 + \xi R) \phi = 0$$

donde

$$(2.2) \quad \square \phi \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi]$$

El término $\xi R \phi$ tiene en cuenta un posible acoplamiento entre

curvatura R y el campo ϕ . La constante de acoplamiento ξ es, por ahora, desconocida. Diremos que el acoplamiento es mínimo si $\xi = 0$. Cualquiera sea el valor de ξ , la ecuación (2.1) recupera su forma habitual en el caso plano ($R = 0$).

Las convenciones a utilizarse en esta Tesis serán las de la ref. [32], es decir, la indicada como $(- - -)$ en la ref. [79], a saber:

$$(2.3) \quad g_{\mu\nu} = (+ - - - \dots)$$

(Trabajaremos en n dimensiones, salvo expresa mención en contra).

$$(2.4) \quad R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} [\partial_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} - \partial_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa} + \partial_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa}] + g^{\rho\sigma} [(\lambda\nu; \rho)(\mu\kappa; \sigma) - (\lambda\kappa; \rho)(\mu\nu; \sigma)]$$

donde

$$(2.5) \quad (\lambda\nu; \rho) \equiv \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\lambda\rho} - \partial_{\rho} g_{\lambda\nu})$$

Además:

$$(2.6) \quad R_{\mu\kappa} \equiv g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

Usaremos unidades naturales ($c=1$, $\hbar=1$).

Sea $\{u_k(x)\} \cup \{u_k^*(x)\}$ una base de soluciones de la ecuación de campo (2.1), donde k es un índice o un conjunto de índices continuos o discretos, que etiquetan las soluciones. Consideremos además que la base ha sido ortonormalizada en el producto interno de Klein-Gordon:

$$(2.7.a) \quad (u_k, u_{k'}) = -\delta_{kk'}$$

$$(2.7.b) \quad (u_k, u_{k'}^*) = 0$$

$$(2.7.c) \quad (u_k^*, u_{k'}^*) = \delta_{kk'}$$

donde el producto interno $(\ , \)$ es definido como:

$$(2.8) \quad (\psi, \varphi) \equiv i \int_{\Sigma} (\psi \partial_{\mu} \varphi^* - \varphi^* \partial_{\mu} \psi) d\Sigma^{\mu}$$

siendo Σ cualquier hipersuperficie espacial completa.

Se puede demostrar que el producto interno de Klein-Gordon (2.8), entre dos soluciones de la ecuación (2.1), es independiente de la hipersuperficie Σ , siempre que esas soluciones tiendan a cero suficientemente rápido en los confines de Σ (ver, por ejemplo [30]).

La solución real más general de la ecuación (2.1) puede escribirse como:

$$(2.9) \quad \phi(x) = \sum_k a_k u_k(x) + a_k^* u_k^*(x)$$

donde el símbolo \sum_k debe interpretarse como suma o integral $\int d\mu(k)$, según k sea discreto o continuo. En caso que k sea continuo la medida de integración $d\mu(k)$ debe ser tal que el símbolo $\delta_{kk'}$, utilizado en (2.7), satisfaga:

$$\int d\mu(k) \delta_{kk'} = 1$$

Para cuantificar el campo en el formalismo de la segunda cuantificación, los coeficientes a_k, a_k^* en (2.9) se interpretan como operadores a_k, a_k^+ actuando sobre un espacio de estados cuánticos del campo en la representación de Heisenberg. Ese espacio de estados es la realización de Fock de un espacio de Hilbert [80] cuya base se genera con los operadores de destrucción a_k y los operadores de creación a_k^+ , de la siguiente forma: hay un estado fundamental $|0\rangle$, el estado de vacío, tal que es destruido por cualquier operador de destrucción:

$$(2.10) \quad a_k |0\rangle = 0 \quad \forall k$$

Los restantes estados de la base se generan a partir de $|0\rangle$ mediante la aplicación de operadores de creación:

$$(2.11) \quad |m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_i}, \dots\rangle \equiv (m_{k_1}! m_{k_2}! \dots m_{k_i}! \dots)^{-1/2} \cdot (a_{k_1}^+)^{m_{k_1}} (a_{k_2}^+)^{m_{k_2}} \dots (a_{k_i}^+)^{m_{k_i}} |0\rangle$$

Las reglas de conmutación para los operadores a_k, a_k^+ son:

$$(2.12.a) \quad [a_k, a_{k'}] = 0$$

$$(2.12.b) \quad [a_k^+, a_{k'}^+] = 0$$

$$(2.12.c) \quad [a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}$$

De modo que si $|0\rangle$ esté normalizado:

$$(2.13) \quad \langle 0|0\rangle = 1$$

entonces la base de estados (2.11) es ortonormal.

Los estados de la base están caracterizados por los números cuánticos $\{m_{k_i}\}$. Es fácil ver que el estado (2.11) es autoestado del operador:

$$(2.14) \quad N_{k_i} \equiv a_{k_i}^+ a_{k_i}$$

con autovalor m_{k_i} . De modo que el conjunto $\{N_k\}$ de todos los posibles operadores N_k , es un conjunto completo de operadores hermiticos que conmutan.

Llegado a este punto deberíamos preguntarnos si esta forma de cuantificar el campo, o bien, de definir el estado de vacío, es o no independiente de la base de soluciones $\{u_k\} \cup \{u_k^*\}$ utilizada. En efecto, en la definición de vacío (2.10) intervienen los

operadores a_k asociados a una dada base de soluciones. Notemos que, según (2.7) y (2.9):

$$(2.15.a) \quad a_k = - (u_k, \phi)$$

$$(2.15.b) \quad a_k^+ = (u_k^*, \phi)$$

De manera que si usamos otra base de soluciones para desarrollar el mismo campo ϕ , a_k será otro operador. Por ejemplo consideremos la base de soluciones $\{v_k\} \cup \{v_k^*\}$, donde:

$$(2.16) \quad v_k = \sum_{k'} \alpha_{kk'} u_{k'} + \beta_{kk'} u_{k'}^*$$

y los coeficientes $\alpha_{kk'}$ y $\beta_{kk'}$ sólo están restringidos por la condición que la base $\{v_k\} \cup \{v_k^*\}$ satisfaga (2.7). El cambio de base (2.16) se llama "transformación de Bogolubov". Los operadores de destrucción y creación asociados a la nueva base son, usando las propiedades del producto interno:

$$(2.17.a) \quad b_k = -(v_k, \phi) = \sum_{k'} (\alpha_{kk'}^* a_{k'} - \beta_{kk'} a_{k'}^+)$$

mientras que:

$$(2.17.b) \quad a_k = -(u_k, \phi) = \sum_{k'} (\alpha_{k'k} b_{k'} + \beta_{k'k}^* b_{k'}^+)$$

Llamemos $|0_0\rangle$ al estado que verifica:

$$(2.18.a) \quad a_k |0_0\rangle = 0 \quad \forall k$$

y $|0_v\rangle$ al estado que verifica:

(2.18.b)

$$b_k |0_v\rangle = 0 \quad \forall k$$

Luego:

$$\begin{aligned} \langle 0_v | b_k^\dagger b_k | 0_v \rangle &= \langle 0_v | \left(- \sum_i \beta_{ki} a_i \right) \left(- \sum_j \beta_{kj}^* a_j^\dagger \right) | 0_v \rangle = \\ &= \langle 0_v | \sum_{ij} \beta_{ki} \beta_{kj}^* a_i a_j^\dagger | 0_v \rangle \end{aligned}$$

y usando (2.12.c):

(2.19.a)

$$\langle 0_v | b_k^\dagger b_k | 0_v \rangle = \sum_j |\beta_{kj}|^2$$

Del mismo modo puede demostrarse que:

(2.19.b)

$$\langle 0_v | a_k^\dagger a_k | 0_v \rangle = \sum_j |\beta_{jk}|^2$$

Por otro lado, por definición es:

(2.20.a)

$$\langle 0_v | b_k^\dagger b_k | 0_v \rangle = 0$$

(2.20.b)

$$\langle 0_v | a_k^\dagger a_k | 0_v \rangle = 0$$

De la comparación entre (2.19) y (2.20) resulta que toda vez que haya coeficientes β no nulos en la transformación de Bogolubov (2.16), los vacíos $|0_u\rangle$ y $|0_v\rangle$ serán estados diferentes.

De modo que cabe presuntarse, ¿cuál es la base de soluciones que corresponde al vacío "correcto"?; o bien, ¿cuál es la forma "correcta" de cuantificar el campo?. Y otra cuestión igualmente interesante es: ¿son unitariamente equivalentes los espacios de Hilbert generados, vía (2.11), a partir de $|0_u\rangle$ y $|0_v\rangle$?

El capítulo 2 de esta Tesis tiene el objetivo de dar respuesta a la cuestión de la elección del vacío. Las publicaciones existentes sobre este tema generalmente estudian el problema en geometrías particulares, por ejemplo en aquellas donde alguna propiedad de invariancia permite seleccionar una base de soluciones en detrimento de otras. La originalidad de los resultados que aquí se expondrán, reside en que por primera vez se presenta un tratamiento general que incluye además el papel jugado por los observadores.

En la sección siguiente avanzaremos en la comprensión de las cuestiones que acabamos de plantear, mediante el estudio de un conocido ejemplo de la literatura.

2.2 LOS VACÍOS DE MINKOWSKI Y DE RINDLER

Consideremos un espacio-tiempo plano bidimensional (por simplicidad) y un campo escalar sin masa. En coordenadas minkowskianas (t,x) la expresión del intervalo es:

$$(2.21) \quad ds^2 = dt^2 - dx^2$$

y la ecuación de campo (2.1) se escribe:

$$(2.22) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

Una posible base de soluciones, ortonormalizada según (2.7) es:

$$(2.23) \quad v_k = (4\pi\omega_k)^{-1/2} e^{-i(\omega_k t - kx)}, \quad \omega_k \equiv |k|, \quad k \in \mathbb{R}$$

En cualquier texto de Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempo plano [53,81] veremos que esta base es la utilizada para cuantificar el campo. La elección de la misma está motivada en que los estados (2.11) resultan autoestados de los generadores de las traslaciones temporales y espaciales (la energía H y el impulso P), siendo:

$$(2.24.a) \quad H |m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_i}, \dots\rangle = \left[\sum_{k_i} (m_{k_i} + \frac{1}{2}) \omega_{k_i} \right] |m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_i}, \dots\rangle$$

$$(2.24.b) \quad P |m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_i}, \dots\rangle = \left[\sum_{k_i} m_{k_i} k_i \right] |m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_i}, \dots\rangle$$

(ver [81]). Las ecuaciones (2.24) se interpretan diciendo que el estado $|m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_i}, \dots\rangle$ contiene m_{k_i} partículas con energía ω_{k_i} e impulso k_i . De manera que los operadores N_k en (2.14) son los observables número de partículas (cuantos del campo). Medir $\{N_k\}$

significa medir el espectro de partículas.

Tanto la ecuación de campo (2.22) como la forma de las funciones de la base (2.23) son invariantes lorentzianos. De aquí resulta que el estado de vacío asociado a la base (2.23) es invariante lorentziano (ver [81]). Lo llamaremos "vacío de Minkowski" y lo indicaremos con $|0_M\rangle$.

Ahora veamos qué sucede si trabajamos con el mismo campo, en el mismo espacio-tiempo plano bidimensional, pero utilizando coordenadas de Rindler (η, ξ) , definidas como:

$$(2.25.a) \quad t = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh a\eta$$

$$a > 0$$

$$(2.25.b) \quad x = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh a\eta$$

Notemos que la carta (η, ξ) no cubre todo el espacio-tiempo; pues de acuerdo con (2.25) es:

$$x > |t| \quad \forall \eta, \xi$$

La región cubierta por la carta de Rindler es la indicada con la letra II en la Fis.1. Esta región es llamada "cuña derecha". Por medio de otra carta es posible cubrir también la cuña izquierda I:

$$(2.26.a) \quad t = -\frac{e^{a\xi}}{a} \sinh a\eta$$

$$a > 0$$

$$(2.26.b) \quad x = -\frac{e^{a\xi}}{a} \cosh a\eta$$

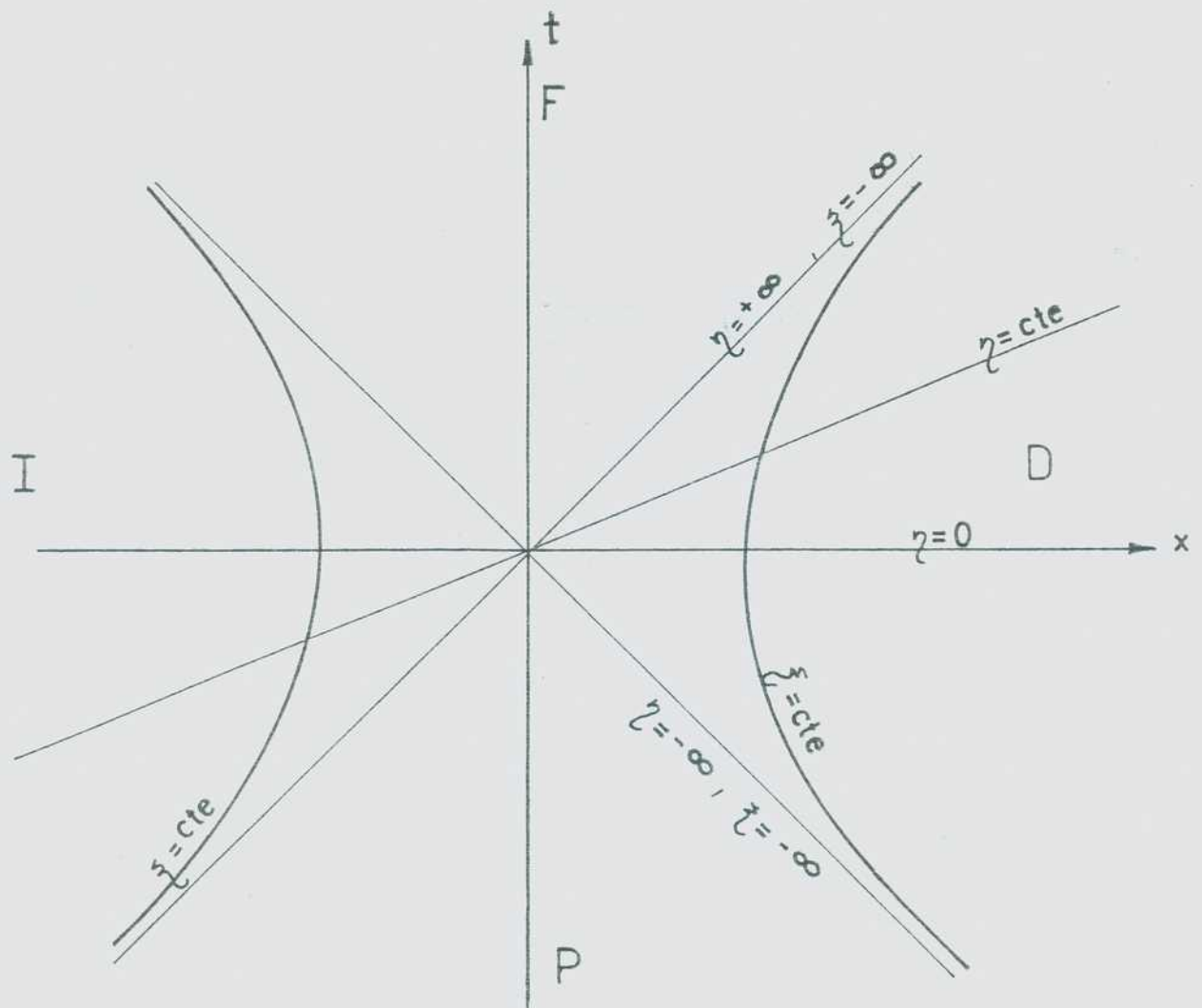


Fig.1: Coordenadas de Rindler (η, ξ) . En el plano (t, x) se muestran las líneas $\eta = cte$ y $\xi = cte$. Una carta de Rindler cubre sólo una de las cuñas D, I, F o P .

En la Fig.1 se ven también las líneas $\eta = \text{cte.}$ y $\xi = \text{cte.}$

En una carta de Rindler el intervalo es:

$$(2.27) \quad ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2)$$

y la ecuación de campo (2.1) se escribe, en ambas cuñas:

$$(2.28) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0$$

Notemos que (2.28) tiene la misma forma que (2.22). Esta no es una propiedad general, sino que es una consecuencia de que se escogió un cambio de carta conforme, y de que la ecuación de campo, en el presente caso, es invariante conforme (ver más detalles en la sección 2.8).

De modo que en ambas cuñas, derecha e izquierda, existen soluciones normalizadas de la forma:

$$(2.29) \quad (4\pi\omega_k)^{-1/2} e^{\pm i\omega_k\eta + ik\xi}, \quad \omega_k \equiv |k|, \quad k \in \mathbb{R}$$

Si definimos:

$${}_D\mu_k \equiv \begin{cases} (4\pi\omega_k)^{-1/2} e^{-i(\omega_k\eta - k\xi)} & \text{en } D \\ 0 & \text{en } I \end{cases}$$

$$(2.30.a)$$

$${}^I u_k \equiv \begin{cases} 0 & \text{en } D \\ (4\pi\omega_k)^{-1/2} e^{i(\omega_k \eta + k\xi)} & \text{en } I \end{cases}$$

(2.30.b)

tenemos que $\{{}^D u_k\} \cup \{{}^D u_k^*\}$ es una base completa en D y $\{{}^I u_k\} \cup \{{}^I u_k^*\}$ es completa en I , pero ninguna de ellas por separado es completa en todo el espacio-tiempo (la diferencia de signos en los exponentes es necesaria para satisfacer (2.7.a), pues en D es $d\Sigma^\eta = d\xi$, mientras que en I es $d\Sigma^\eta = -d\xi$). Sin embargo la unión de las líneas $\eta = \text{cte.}$ en D e I , es una superficie de Cauchy para todo el espacio-tiempo; entonces resulta que las soluciones ${}^D u_k$ y ${}^I u_k$ pueden ser analíticamente continuadas a las regiones F y P . Cuando $k > 0$, ${}^D u_k$ corresponde a una onda que viaja hacia la derecha en D con la velocidad de la luz; su extensión será no nula en la región P . Mientras que la extensión de ${}^I u_k$, cuando $k > 0$, será no nula en F (y a la inversa para $k < 0$) [67,82]. Así extendidas, resulta que la unión de ambas bases es una base completa en todo el espacio-tiempo. Por lo tanto es posible desarrollar el campo en cualquier punto del espacio-tiempo como:

$$(2.31) \quad \phi = \sum_k {}^I a_k {}^I u_k + {}^I a_k^* {}^I u_k^* + {}^D a_k {}^D u_k + {}^D a_k^* {}^D u_k^*$$

Resulta natural preguntarse por qué no hacer la cuantificación del campo a partir de este desarrollo, interpretando a ${}^D a_k$ y ${}^I a_k$ como operadores de destrucción y definiendo un vacío $|0_R\rangle$ (vacío de Rindler) como:

$$(2.32) \quad {}^0a_k |0_R\rangle = {}^Ia_k |0_R\rangle \equiv 0 \quad \forall k$$

Es posible demostrar que los vacíos de Minkowski y de Rindler son distintos estados. Para ello basta ver que la transformación de Bogolubov (2.16), entre los modos minkowskianos (2.23) y los modos de Rindler (2.30), tiene coeficientes β no nulos. En lugar de realizar directamente el cálculo de β , vemos una forma más elegante de hacer la demostración [67,83]. Utilizando las coordenadas nulas:

$$(2.33.a) \quad U \equiv t-x = \mp \frac{e^{a(\xi-\eta)}}{a}$$

$$(2.33.b) \quad V \equiv t+x = \pm \frac{e^{a(\xi+\eta)}}{a}$$

(el signo superior corresponde a la región II y el inferior corresponde a la región I), los modos minkowskianos (2.23) pueden escribirse como:

$$(2.34.a) \quad v_k = (4\pi\omega_k)^{-1/2} e^{-i\omega_k U} \quad \text{si } k > 0$$

$$(2.34.b) \quad v_k = (4\pi\omega_k)^{-1/2} e^{-i\omega_k V} \quad \text{si } k < 0$$

Luego v_k es analítica y acotada para $\text{Im } U < 0$ e $\text{Im } V < 0$. Entonces una manera de probar que hay coeficientes β no nulos

la transformación de Bosolubov, consiste en ver que no existe una combinación de \mathcal{D}_{U_k} y \mathcal{I}_{U_k} que sea analítica cuando $\text{Im } U < 0$ e $\text{Im } V < 0$. En otras palabras, para obtener un resultado analítico en los semiplanos inferiores de las variables complejas U y V , necesariamente hay que mezclar los modos \mathcal{D}_{U_k} y \mathcal{I}_{U_k} con sus complejos conjugados; esto significa que hay coeficientes β no nulos. La demostración es inmediata si tenemos en cuenta que, debido al cambio en los signos de los exponentes de \mathcal{D}_{U_k} y \mathcal{I}_{U_k} , cualquier empañe entre \mathcal{D}_{U_k} y \mathcal{I}_{U_k} resulta no analítico en $t=x=0$, y por lo tanto en $\text{Re}(U)=\text{Re}(V)=0$.

En cambio si son analíticas y acotadas para $\text{Im } U < 0$ e $\text{Im } V < 0$ las combinaciones normalizadas:

$$(2.35.a) \quad \left[2 \sinh \frac{\pi \omega_k}{a} \right]^{-1/2} \left\{ e^{-\frac{\pi \omega_k}{2a}} \mathcal{D}_{U_k}^* + e^{\frac{\pi \omega_k}{2a}} \mathcal{I}_{U_k} \right\}$$

$$(2.35.b) \quad \left[2 \sinh \frac{\pi \omega_k}{a} \right]^{-1/2} \left\{ e^{\frac{\pi \omega_k}{2a}} \mathcal{D}_{U_k} + e^{-\frac{\pi \omega_k}{2a}} \mathcal{I}_{U_k}^* \right\}$$

Las ecuaciones (2.35) no son las transformaciones de Bosolubov (2.16), porque ni (2.35.a) ni (2.35.b) son iguales a los modos minkowskianos v_k (2.23). Sin embargo, como los v_k^* no son analíticos para $\text{Im } U < 0$ e $\text{Im } V < 0$, si podemos asegurar que, a lo sumo, (2.35.a) y (2.35.b) corresponden a combinaciones lineales de los v_k , sin intervención de los v_k^* . Teniendo en cuenta (2.19), es fácil ver que, cualquiera sea esa combinación, resulta que:

$$(2.36) \quad \langle 0_M | {}^0a_k^\dagger {}^0a_k | 0_M \rangle = \langle 0_M | {}^1a_k^\dagger {}^1a_k | 0_M \rangle = \left(e^{\frac{2\pi\omega_k}{a}} - 1 \right)^{-1}$$

Como acabamos de ver, no es necesario trabajar en un espacio-tiempo curvo para encontrar ambigüedades en la cuantificación de un campo. En el ejemplo anterior hemos obtenido dos estados de vacío distintos, $|0_M\rangle$ y $|0_R\rangle$, al tratar de cuantificar el campo en el espacio-tiempo plano. Más aún, se puede demostrar que los espacios de Hilbert que se generan a partir de $|0_M\rangle$ y $|0_R\rangle$ son, en este caso, unitariamente no equivalentes [83].

Ahora bien, ¿existe alguna razón para preferir el vacío de Minkowski al vacío de Rindler? Una posible respuesta a esta pregunta podría ser que la métrica es independiente de las coordenadas, en coordenadas minkowskianas (ver (2.21)); en cambio en coordenadas de Rindler la métrica depende de ξ (ver (2.27)). En pocas palabras, las coordenadas minkowskianas ponen de manifiesto más simetrías que las de Rindler, lo cual privilegiaría a los modos (2.23) pues conducen a un vacío invariante lorentziano. Esta es la razón por la cual los textos usan habitualmente los modos (2.23).

Sin embargo un trabajo de Unruh [67] permitió mostrar que también $|0_R\rangle$ posee un significado físico importante. La idea de Unruh consistió en hacer un modelo de detector de partículas (cuantos de

campo). El detector es un dispositivo que posee un campo ψ que interactúa con el campo ϕ cuyos cuantos se desea medir. El cambio de estado del detector es señal de que ha ocurrido una interacción con un cuanto. Unruh demostró que si los detectores se mueven siguiendo las trayectorias inerciales $x = \text{cte.}$, entonces no registran partículas cuando el estado del campo es el vacío de Minkowski. Mientras que si los detectores se mueven siguiendo las trayectorias aceleradas $\dot{x} = \text{cte.}$, entonces no registran partículas cuando el estado del campo es el vacío de Rindler (ver también [84]). El resultado (2.36) indica que los observadores acelerados detectan un espectro térmico en el estado $|0_M\rangle$. Según el trabajo de Unruh, ambos $|0_M\rangle$ y $|0_R\rangle$ pueden ser buenos vacíos, dependiendo de quién los mide.

La idea de Unruh no ha sido, a nuestro juicio, suficientemente aprovechada en la literatura. No existe un estudio sobre cómo la cuantificación de un campo depende de los observadores, cuando el espacio-tiempo es de geometría arbitraria y se trabaja con cualquier masa m y cualquier acoplamiento ξ . En las ref. [85,86] se puede encontrar una generalización del caso de observadores de Rindler, en donde se aprovechan las propiedades de invariancia conforme de la teoría, cuando la masa del campo es nula y la geometría es plana y bidimensional.

Por lo tanto resulta de interés estudiar cómo incluir a los observadores al cuantificar el campo en un contexto completamente general.

Comenzaremos en la sección siguiente investigando en qué consiste, cómo se caracteriza y qué papel juega un sistema de referencia en

Relatividad General.

2.3 SISTEMAS DE REFERENCIA

En la sección anterior se han mezclado dos conceptos diferentes, pero a menudo confundidos: por un lado los sistemas (geométricos) de coordenadas o "cartas"; por el otro, los sistemas de referencia físicos o sistema de observadores. ¿Qué es un sistema de referencia en Relatividad General?

En Física Clásica, un sistema de referencia físico está formado por un cuerpo rígido de referencia y un reloj. Para el mismo sistema de referencia es posible elegir muchos diferentes sistemas de coordenadas o cartas: cartesianas, esféricas, etc.

Para construir un sistema de referencia (sistema de observadores) en Relatividad General, es necesario reemplazar el cuerpo rígido por un fluido (como es bien sabido, no existe la noción de rígido en Relatividad). El fluido ha de ser irrotacional (ver Apéndice A). Sobre cada punto material de este fluido hay un reloj, el cual puede no ser un reloj standard (puede no indicar tiempo propio). El reloj es simplemente un mecanismo para medir tiempo, que indica una función arbitraria continuamente creciente del tiempo propio. Supondremos que las indicaciones x^0 de dos relojes vecinos difieren infinitesimalmente. Si cada punto material del fluido es etiquetado con $n-1$ números $x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$, variando continuamente, entonces $x^0, x^1,$

x^3, \dots, x^{m-1}) es una carta (sistema de coordenadas) particular [87]. Pero también podemos utilizar cualquier otra carta. Tan pronto como una carta ha sido construida, es posible medir las componentes del tensor métrico en esa carta, el escalar de curvatura, etc. [88].

Como el fluido es irrotacional, posee hipersuperficies espaciales globales ortogonales a las líneas de fluido (las líneas de universo de los puntos materiales que componen el fluido) (ver Apéndice A). Este hecho nos permitirá introducir una noción natural de 'tiempo' en cada sistema de observadores. Definimos el tiempo natural como una cantidad que es constante sobre cada una de estas hipersuperficies. En otras palabras, un tiempo natural respecto de un sistema de observadores, es aquél que es medido por relojes sincronizados sobre las hipersuperficies ortogonales a las líneas de fluido. Por ejemplo, η es el tiempo natural para los observadores que siguen las líneas $\xi = \text{cte.}$ en la sección 2.2 (observadores de Rindler), pues las líneas $\eta = \text{cte.}$ son ortogonales a las líneas $\xi = \text{cte.}$ Mientras que t es el tiempo natural para los observadores inerciales o minkowskianos $x = \text{cte.}$ Como se ve en los ejemplos, el tiempo natural puede o no coincidir con el tiempo propio de los observadores (η no es tiempo propio; t sí lo es).

Por supuesto, si T es tiempo natural, $T' = T'(T)$ también lo es.

En un dado espacio-tiempo es posible construir diferentes sistemas de observadores utilizando diferentes fluidos. Como conclusión de lo expuesto, el papel de un sistema de referencia físico en Relatividad General, consiste en foliar el espacio-tiempo en

espacio y tiempo. "Espacio" es la hipersuperficie ortogonal a las líneas de fluido. El sistema de referencia señala qué es espacio y qué es tiempo.

Esta conclusión parecería irrelevante en una teoría que trata a las coordenadas temporales y espaciales en un pie de igualdad. Más aún, en verdad para establecer las componentes del tensor métrico, del tensor de Riemann, etc., lo único que hace falta es una carta (sistema de coordenadas); no hace falta un sistema de referencia.

Entonces podríamos preguntarnos, ¿cuál es la importancia del sistema de referencia físico?, ¿para qué hace falta establecer las nociones de tiempo y de espacio? La respuesta a estas preguntas está en el comportamiento de los aparatos de medición. Los aparatos de medición distinguen las nociones de tiempo y espacio. Por ejemplo, un aparato que mide campo eléctrico, está midiendo las componentes temporal-espacial de un tensor (el tensor de campo). Mientras que un aparato que mide campo magnético, está midiendo las componentes espacial-espacial de ese mismo tensor. No hay aparatos para medir el tensor de campo; sólo hay aparatos para medir o campo eléctrico o campo magnético. Como consecuencia de ello, dos aparatos iguales para medir campo eléctrico, colocados en distintos sistemas de referencia físicos, obtienen mediciones diferentes en el mismo evento del espacio-tiempo, sencillamente porque las nociones de tiempo y espacio asociadas a cada sistema de referencia físico son diferentes.

Esta observación nos conduce naturalmente a plantearnos la

posibilidad de que la noción de vacío (no detección de cuantos de campo) pueda depender de los observadores. La cuestión es, entonces, dar una prescripción para definir el estado de vacío, que incluya a los observadores, que funcione en general, y que además coincida con los vacíos conocidos (Minkowski, Rindler, etc.) en los casos particulares correspondientes. Este será el tema de las secciones siguientes.

2.4 CARACTERIZACION DEL SISTEMA DE OBSERVADORES

Si queremos definir un vacío dependiente de los observadores, el primer paso debe ser definir magnitudes que caractericen al sistema de referencia físico (es decir, a los observadores). Dado un sistema de referencia físico (un fluido irrotacional) y una carta cualquiera, las líneas del fluido quedan caracterizadas por ecuaciones paramétricas. Tanto el tiempo propio τ como el tiempo natural T pueden jugar el papel de parámetro. Es decir que una línea de fluido puede caracterizarse con una ecuación de la forma:

$$(2.37.a) \quad x^\mu = x^\mu(\tau)$$

o bien:

$$(2.37.b) \quad x^\mu = x^\mu(T)$$

Entonces quedan definidos dos vectores tangentes a la línea [89]:

$$(2.38.a) \quad u \equiv \frac{d}{dz} = \frac{d}{ds}$$

(recordemos que trabajamos con unidades tales que $c=1$), y:

$$(2.38.b) \quad v \equiv \frac{d}{dT}$$

cuyas componentes, en la carta donde la línea se describe con las ecuaciones (2.37), corresponden a las derivadas de las ecuaciones paramétricas de la línea:

$$(2.39.a) \quad u^\mu = \frac{dx^\mu(z)}{dz} = \frac{dx^\mu}{ds}$$

$$(2.39.b) \quad v^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{dT}$$

El vector u es unitario:

$$(2.40.a) \quad u_\mu u^\mu = \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

Mientras que la norma al cuadrado del vector v es:

$$(2.40.b) \quad v_\mu v^\mu = \frac{dx_\mu}{dT} \frac{dx^\mu}{dT} = \frac{ds^2}{dT^2} = \left(\frac{dz}{dT} \right)^2$$

Es decir que la norma de v contiene la información sobre la razón entre la marcha del tiempo propio y la marcha del tiempo natural

en cada punto del espacio-tiempo.

Por comodidad, utilizaremos una carta adaptada al sistema de observadores, es decir que $x^0 = T$ (el tiempo natural) y $x^i = \text{cte.}$ sobre cada línea de fluido ($i=1,2,3,\dots,n-1$). Por lo tanto, en una carta adaptada las únicas componentes no nulas de los vectores u y v son u^0 y v^0 :

$$(2.41.a) \quad u^\mu = (g_{00}^{-1/2}, 0, 0, 0, \dots)$$

$$(2.41.b) \quad v^\mu = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

Además, como la hipersuperficie $T=\text{cte.}$ es ortogonal a las líneas de fluido, resulta que en una carta adaptada las componentes g_{0i} del tensor métrico se anulan. La forma del tensor métrico en una carta adaptada es:

$$(2.42) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & -\gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mu, \nu : 0, 1, 2, 3, \dots, m-1 \\ i, j : 1, 2, 3, \dots, m-1 \end{array}$$

donde γ_{ij} es la métrica (definida positiva) inducida sobre "el espacio" (la hipersuperficie Σ ortogonal a las líneas de fluido).

2.5 EL OPERADOR HAMILTONIANO

Nuestro objetivo es prescribir cuál es el estado de vacío que corresponde a un dado sistema de observadores, en una dada geometría. Dicho de otra forma, queremos saber cómo la cuantificación del campo depende de los observadores.

Para ello la idea es definir sobre cada hipersuperficie Σ ($T=\text{cte.}$) un operador Hamiltoniano, invariante frente a cambio de carta, pero dependiente de los observadores. El estado de vacío correcto, para un dado sistema de observadores, será aquél que se comporte frente a este operador Hamiltoniano, satisfaciendo dos requisitos físicamente deseables que explicitaremos más adelante.

Para comenzar, definamos el operador Hamiltoniano H_Σ . Naturalmente en la definición de H_Σ debe intervenir el operador tensor de energía-momento del campo $T_{\mu\nu}$. $T_{\mu\nu}$ resulta de variar la acción del campo S respecto del tensor métrico:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \equiv 2 (-g)^{-1/2} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = & \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \{\phi_{;\mu}, \phi_{;\nu}\} + \\ & + \left(\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \{\phi_{;\lambda}, \phi_{;\rho}\} - \xi \{\phi, \phi_{;\mu\nu}\} + \\ & + \xi g_{\mu\nu} \{\phi, \square\phi\} - \frac{1}{2} \left[\xi (R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} m^2 g_{\mu\nu} \right] \{\phi, \phi\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde la acción S es:

$$S \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\xi}{2} R \phi^2 \right\} \quad (2.44)$$

ϵ es el determinante del tensor métrico y el símbolo $(; \mu)$ indica derivación covariante (que en el caso de un escalar se reduce a la derivación ordinaria ∂_μ , también indicada como $(, \mu)$).

H_Σ será un escalar (no puede depender de la carta porque el estado de vacío no puede depender de la carta). Además debe estar definido como una integral sobre todo el espacio (sobre Σ), cuyo integrando dependa de $T_{\mu\nu}$ y de los observadores. Como los observadores están caracterizados por los vectores u y v , los cuales solo difieren en sus normas, podemos concluir que la forma de H_Σ debe ser la siguiente:

$$(2.45) \quad H_\Sigma = \int_\Sigma T_{\mu\nu} F(\|v\|) v^\mu d\Sigma^\nu$$

donde $F(\|v\|)$ es una función escalar que depende de la norma de v y, eventualmente, de la geometría. Para encontrar la función $F(\|v\|)$ exisiremos que H_Σ sea conjugado del tiempo natural. Es decir que si realizamos un cambio de tiempo natural:

$$(2.46) \quad T \longrightarrow T' = T'(T)$$

entonces:

$$(2.47) \quad H_\Sigma \longrightarrow H'_\Sigma = \frac{dT}{dT'} H_\Sigma$$

Por la definición (2.38.b), si cambiamos el tiempo natural, cambia el vector v :

$$(2.48) \quad \mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{v}' \equiv \frac{d}{dT'} = \frac{dT}{dT'} \frac{d}{dT} = \frac{dT}{dT'} \mathbf{v}$$

Luego, en cualquier carta resulta:

$$(2.49) \quad v'^{\mu} = \frac{dT}{dT'} v^{\mu}$$

Entonces:

$$(2.50) \quad H'_{\Sigma} = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} F(\|\mathbf{v}\|) v'^{\mu} d\Sigma^{\nu} = \frac{dT}{dT'} \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} F(\|\mathbf{v}'\|) v^{\mu} d\Sigma^{\nu}$$

Comparando (2.45), (2.47) y (2.50) se encuentra que:

$$(2.51) \quad F(\|\mathbf{v}\|) = F(\|\mathbf{v}'\|) = \text{cte.}$$

Entonces, eligiendo convenientemente las unidades, $F(\|\mathbf{v}\|)$ puede ser igual a uno y tenemos que el operador Hamiltoniano es [90]:

$$(2.52) \quad H_{\Sigma} \equiv \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} v^{\mu} d\Sigma^{\nu} = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} v^{\mu} u^{\nu} d\Sigma$$

pues \mathbf{u} es un vector unitario normal a Σ , $d\Sigma$ es el elemento de volumen en Σ :

$$(2.53) \quad d\Sigma = \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3 \dots dx^{m-1}$$

siendo γ el determinante de la métrica inducida sobre Σ , γ_{ij} .

El papel jugado por \mathbf{v} en (2.52) es verdaderamente esencial.

Consideremos dos sistemas de observadores diferentes, en el mismo espacio-tiempo, tales que los "espacios" de ambos sistemas son coincidentes en algún instante. Para ejemplificar esta situación, obsérvese en la Fig.1 que las superficies $t=0$ y $\eta=0$, ortogonales a los fluidos de Minkowski y de Rindler respectivamente, son coincidentes; es decir que en ese instante los observadores de Minkowski y de Rindler están de acuerdo acerca de qué es el espacio.

Sobre una Σ común a ambos sistemas de observadores, sólo es posible distinguir a qué fluido corresponde cada observador, mediante la comparación de la marcha de los relojes que miden tiempo natural. Por ejemplo, el tiempo natural no corre igual para los observadores de Minkowski que para los de Rindler. El tiempo natural de Minkowski se sincroniza sobre las líneas horizontales de la Fig.1 ($T_M = t$). Mientras que el tiempo natural de Rindler se sincroniza sobre las líneas radiales de la Fig.1 ($T_R = \eta$); para que esto pueda ocurrir, la marcha del tiempo natural de Rindler debe depender de la posición. El vector \mathbf{v} permite distinguir los sistemas de observadores en una circunstancia como la señalada, porque él contiene la información sobre la marcha del tiempo natural (ver (2.40.b)). Por ejemplo $\|\mathbf{v}_M\|=1$, mientras que $\|\mathbf{v}_R\|=e^{\alpha}$. Por este motivo es que decimos que \mathbf{v} juega un papel esencial en (2.52).

De la definición (2.52) se puede obtener un teorema de conservación, cuando \mathbf{v} es un vector de Killins [89] (básicamente,

que v sea un vector de Killing significa que las componentes del tensor métrico en una carta adaptada, son independientes de $x^0 = T$). En efecto, si v se comporta como un vector de Killing en la región limitada por Σ y Σ' , es fácil demostrar que $H_{\Sigma'} = H_{\Sigma}$ [89]. Pero en general, H_{Σ} depende de Σ (es decir, depende de T).

2.6 EL VACIO DEPENDIENTE DE LOS OBSERVADORES

Hemos definido un Hamiltoniano escalar (invariante frente a cambio de carta), pero dependiente de los observadores (está integrado sobre una hipersuperficie Σ ortogonal a las líneas de fluido y en el integrando aparece v). Este operador será la herramienta fundamental para definir el vacío. Vamos a escribir dos criterios diferentes para definir el vacío, y demostraremos luego que ambos criterios son equivalentes:

Criterio 1.- Diagonalización del Hamiltoniano.

La base $\{u_k\} \cup \{u_k^*\}$ de soluciones de la ecuación de campo, asociada al estado de vacío, debe ser tal que, cuando se desarrolle el campo en esta base, el operador Hamiltoniano toma la forma:

$$(2.54) \quad H_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_k h_k (a_k a_k^+ + a_k^+ a_k)$$

Este criterio resulta de imitar una propiedad de la Teoría Cuántica de Campos en el espacio-tiempo plano, en donde el Hamiltoniano tiene la forma (2.54), la cual, luego de eliminar los infinitos mediante el ordenamiento normal de operadores [81], toma la forma $\sum_k h_k a_k^\dagger a_k = \sum_k h_k N_k$; esto permite interpretar a h_k como la energía de las partículas.

El criterio de diagonalización del Hamiltoniano ha sido utilizado por otros autores [76,91] en geometrías particulares y sin incluir a los observadores en la definición del Hamiltoniano.

Criterio 2.- Minimización de la energía.

El estado de vacío es tal que $\langle 0 | H_\Sigma | 0 \rangle$ se minimiza.

Este criterio fue utilizado en la ref.[92] trabajando en el espacio-tiempo de Robertson-Walker con un Hamiltoniano que no hace mención explícita de los observadores.

Por supuesto, puede ocurrir que el vacío (o equivalentemente, la base de soluciones) que satisface los criterios sobre una dada hipersuperficie Σ , no los satisfaga sobre otra superficie Σ' .

En tal caso la noción de vacío depende de Σ ; el estado que es vacío en Σ no lo es en Σ' (recordemos que trabajamos en la representación de Heisenberg), es decir que hay creación de cuantos de campo. Si ello ocurre debemos etiquetar con Σ al

vacío: $|0\rangle_\Sigma$, a la base de soluciones asociada al vacío: u_k^z y a los operadores de destrucción y creación correspondientes: a_k^z, a_k^{z+} .

2.7 DATOS DE CAUCHY PARA LA BASE $\{u_k^z\} \cup \{u_k^{z*}\}$

Como es bien sabido, una solución de la ecuación de campo (2.1) queda completamente determinada si damos los datos de Cauchy que satisface sobre alguna hipersuperficie espacial. Por lo tanto podemos caracterizar al vacío en $\Sigma, |0\rangle_\Sigma$, por los datos de Cauchy que satisface la base de soluciones asociada a ese vacío, $\{u_k^z\} \cup \{u_k^{z*}\}$, sobre la hipersuperficie Σ .

Trabajando en una carta adaptada, la ecuación de campo (2.1) toma la forma:

$$(2.55) \quad \frac{\phi_{,00}}{g_{00}} + \frac{\gamma^{ij} \gamma_{ij,0}}{2 g_{00}} \phi_{,0} - \frac{\gamma^{ij} g_{00,i}}{2 g_{00}} \phi_{,i} - \Delta \phi + (m^2 + \xi R) \phi = 0$$

donde Δ es el operador Laplaciano:

$$(2.56) \quad \Delta \phi \equiv \gamma^{ij} \phi_{||ij}$$

El símbolo $||$ en la ecuación (2.56) indica la derivación covariante asociada al tensor métrico γ_{ij} inducido sobre Σ [89].

También en una carta adaptada, el operador Hamiltoniano toma la forma:

$$(2.57) \quad H_\Sigma = \int_\Sigma T_{..} g_{..}^{-1/2} d\Sigma$$

Luego es posible escribir H_Σ como:

$$(2.58) \quad H_\Sigma = \int_\Sigma d\Sigma g_{..}^{-1/2} \left\{ \frac{1}{2} (\phi_{,0})^2 - \frac{1}{4} (\phi \phi_{,00} + \phi_{,00} \phi) + \right. \\ \left. + \frac{B}{2} (\phi \phi_{,0} + \phi_{,0} \phi) + C \phi^2 \right\}$$

donde:

$$(2.59) \quad B \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \gamma^{ij} \gamma_{ij,0} + \frac{g_{00,0}}{4 g_{..}}$$

$$(2.60) \quad C \equiv \left\{ \frac{\gamma^{kl} \gamma^{ij} \gamma_{ik,0} \gamma_{lj,0}}{4} + \frac{\gamma^{ij} \gamma_{ij,0} g_{00,0}}{4 g_{..}} - \frac{\gamma^{ij} \gamma_{ij,00}}{2} \right\}$$

Para obtener la expresión (2.58) debemos usar que el campo satisface la ecuación de campo (2.1), y el Teorema de Gauss sobre Σ para igualar a cero las integrales:

$$(2.61) \quad \int_\Sigma d\Sigma \left(\gamma^{ij} g_{..}^{-1/2} \phi_{||i} \phi \right)_{||j} = 0$$

$$(2.62) \quad \int_\Sigma d\Sigma \left(\gamma^{ij} g_{..}^{-1/2} \phi^2 \right)_{||i} = 0$$

suponiendo que el campo va a cero suficientemente rápido en el

infinito. (Puede verse que ϕ_{μ} es un vector sobre Σ y que $g_{\mu\mu}$ es un escalar sobre Σ , de modo que los integrandos en (2.61) y (2.62) corresponden a la divergencia de un vector).

En realidad la expresión (2.58) para el Hamiltoniano no es nada elegante, pero resultará sumamente ventajosa porque sólo contiene derivadas ordinarias respecto de T .

Si tomamos el desarrollo (2.9) para el campo ϕ , y reemplazamos en (2.58), resulta:

$$\begin{aligned}
 H_{\Sigma} = & \int_{\Sigma} d\Sigma \, g_{00}^{-1/2} \sum_{kk'} a_k a_{k'} \left\{ \frac{1}{2} \mu_{k,0} \mu_{k',0} - \right. \\
 & - \frac{1}{4} (\mu_k \mu_{k',00} + \mu_{k,00} \mu_{k'}) + \frac{B}{2} (\mu_k \mu_{k',0} + \mu_{k,0} \mu_{k'}) + \\
 & + C \mu_k \mu_{k'} \Big\} + \\
 & + \int_{\Sigma} d\Sigma \, g_{00}^{-1/2} \sum_{kk'} a_k^+ a_{k'} \left\{ \frac{1}{2} \mu_{k,0} \mu_{k',0}^* - \right. \\
 & - \frac{1}{4} (\mu_k \mu_{k',00}^* + \mu_{k,00} \mu_{k'}^*) + \frac{B}{2} (\mu_k \mu_{k',0}^* + \mu_{k,0} \mu_{k'}^*) + \\
 & + C \mu_k \mu_{k'}^* \Big\} + \text{h.c.}
 \end{aligned}
 \tag{2.63}$$

Vamos a hacer ahora una suposición que no es esencial, pero que nos facilitará notablemente los próximos cálculos. Supondremos que en la ecuación (2.55) es posible separar la variable $x^0 = T$. De hecho esto se cumple en la mayoría de los casos de interés físico.

La separación de la variable x^0 es posible cuando:

1. $R = R(x^0)$, $s_{00} = s_{00}(x^0)$, $\gamma_{ij} = f(x^0) A_{ij}(x^k)$
 (la variable x^0 se separa multiplicando (2.55) por $f(x^0)$).

2. $R = R(x^k)$, $s_{00} = r(x^0) h(x^i)$, $\gamma_{ij} = A_{ij}(x^k)$
 (la variable x^0 se separa multiplicando (2.55) por $h(x^i)$).

3. $m = 0$, $R = 0$, $s_{00} = r(x^0) h(x^i)$, $\gamma_{ij} = f(x^0) A_{ij}(x^k)$
 (la variable x^0 se separa multiplicando (2.55) por $f(x^0) h(x^i)$).

4. Cuando $s_{\mu\nu} = s_{\mu\nu}(x^0)$, existen soluciones de (2.55) con la forma

$$u_k = T_k(x^0) e^{i k \cdot x}$$

de modo que la variable x^0 se separa en la solución.

Por supuesto, en los casos 1,2,3) la condición sobre R es la más fuerte.

Es fácil ver que en cualquiera de los cuatro casos, los coeficientes R y C en (2.58) son constantes sobre Σ (sólo

dependen de x^0) y pueden salir fuera del signo de integración.

Por otra parte, si tomamos una base de soluciones con la forma:

$$(2.64) \quad u_k = T_k(x^0) E_k(x^i)$$

las relaciones de ortonormalidad (2.7) resultan:

$$(2.65) \quad -\delta_{kk'} = i (T_k \dot{T}_{k'}^* - T_{k'}^* \dot{T}_k) \Big|_{\Sigma} \int_{\Sigma} E_k E_{k'}^* g_{00}^{-1/2} d\Sigma$$

$$(2.66) \quad 0 = i (T_k \dot{T}_{k'} - T_{k'} \dot{T}_k) \Big|_{\Sigma} \int_{\Sigma} E_k E_{k'} g_{00}^{-1/2} d\Sigma$$

donde \dot{T}_k es la derivada de la función T_k . $T_k|_{\Sigma}$ y $\dot{T}_k|_{\Sigma}$ son los datos iniciales que determinan la función $T_k(x^0)$. En efecto T_k satisface una ecuación diferencial de segundo orden:

$$(2.67) \quad \ddot{T}_k + b(x^0) \dot{T}_k + c_k(x^0) T_k = 0$$

donde b y c_k dependen de la geometría y c_k depende además de la constante de separación.

Los datos $T_k|_{\Sigma}$ y $\dot{T}_k|_{\Sigma}$ serán fijados por los criterios 1 y 2 para elegir el vacío.

Por otro lado las funciones $\{E_k\}$ forman una base completa de soluciones de la parte espacial de la ecuación de campo. Si las elegimos ortonormalizadas sobre Σ según:

$$(2.68) \quad \int_{\Sigma} E_k E_{k'}^* g_{00}^{-1/2} d\Sigma = \delta_{kk'}$$

entonces en (2.65) resulta una condición para el Wronskiano de T_k sobre Σ :

$$(2.69) \quad (T_k \dot{T}_k^* - T_k^* \dot{T}_k) \Big|_{\Sigma} = i$$

Es importante notar que, como los coeficientes de la parte espacial de la ecuación de campo son reales, si E_k es solución también lo es E_k^* (para el mismo valor de la constante de separación). Por lo tanto E_k^* forma parte de la base $\{E_k\}$. Adoptemos la notación:

$$(2.70) \quad E_{-k} = E_k^*$$

en cuyo caso, teniendo en cuenta (2.68), escribimos:

$$(2.71) \quad \int_{\Sigma} E_k E_{k'} g_{00}^{-1/2} d\Sigma = \delta_{k,-k'}$$

Entonces, si T_k es la solución de (2.67) para un dado valor de la constante de separación, existen dos posibles modos u_k (ver (2.64)): $T_k E_k$ y $T_k E_k^* = T_k E_{-k}$. En otras palabras, la función T_{-k} asociada a E_{-k} es igual a la función T_k :

$$(2.72) \quad T_{-k} = T_k$$

Si ahora reemplazamos las soluciones (2.64) en la expresión (2.63) del Hamiltoniano, realizamos las integraciones espaciales teniendo en cuenta (2.68), (2.70-72), y reemplazamos \ddot{T}_k en función de T_k y \dot{T}_k usando (2.67), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 H_z = & \sum_k a_k a_k \left\{ \frac{1}{2} \dot{T}_k^2 + \left(B + \frac{b}{2}\right) T_k \dot{T}_k + \left(C + \frac{c_k}{2}\right) T_k^2 \right\} \Big|_z + \\
 & + \sum_k a_k^+ a_k \left\{ \frac{1}{2} |\dot{T}_k|^2 + \left(B + \frac{b}{2}\right) \operatorname{Re}(\dot{T}_k T_k^*) + \left(C + \frac{c_k}{2}\right) |T_k|^2 \right\} \Big|_z + \\
 & + \text{h.c.}
 \end{aligned}
 \tag{2.73}$$

Vemos que la forma en que escojamos las soluciones E_k es irrelevante a los efectos de la elección del vacío, pues las E_k no aparecen en el Hamiltoniano. La elección de las E_k puede sustentarse en algún razonamiento de simetría, si la hubiera, o en la satisfacción de ciertas condiciones sobre los contornos, si éstos existieran.

Para determinar los datos $T_k|_z$ y $\dot{T}_k|_z$ aplicaremos los criterios 1 y 2, que fijan el estado de vacío.

El criterio 1 corresponde simplemente a pedir que se anule la primera llave en la expresión (2.73).

El criterio 2 corresponde a un problema de minimización en donde las variables (las partes real e imaginaria de $T_k|_z$ y $\dot{T}_k|_z$) no son totalmente independientes, sino que están sujetas a la condición (2.69).

El resultado, obtenido mediante un cálculo directo, es que existen datos $T_k|_z$ y $\dot{T}_k|_z$ que satisfacen los criterios sólo cuando:

$$(2.74) \quad c_k > \left(\beta + \frac{b}{2}\right)^2 - 2C$$

Cumpléndose esta condición, ambos criterios son satisfechos por los mismos datos sobre Σ , los cuales tienen la siguiente razón:

$$(2.75) \quad \left. \frac{\dot{T}_k}{T_k} \right|_{\Sigma} = -\left(\beta + \frac{b}{2}\right) - i \left[2C + c_k - \left(\beta + \frac{b}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{\Sigma}$$

Debido a la condición (2.69), impuesta por la normalización, resulta además que:

$$(2.76) \quad \left| T_k \right|^2 \Big|_{\Sigma} = \frac{1}{2} \left[2C + c_k - \left(\beta + \frac{b}{2}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\Sigma}$$

y el Hamiltoniano queda:

$$(2.77) \quad H_{\Sigma} = \sum_k \frac{1}{2} \left[2C + c_k - \left(\beta + \frac{b}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{\Sigma} (a_k^{\Sigma\dagger} a_k^{\Sigma} + a_k^{\Sigma} a_k^{\Sigma\dagger})$$

Por supuesto, la solución $T_k^{\Sigma}(x^0)$ de la ecuación (2.67), que tiene los datos (2.75,76) sobre Σ , puede no cumplir estas condiciones sobre otra Σ' . En tal caso $10; \Sigma > \neq 10; \Sigma' >$ y hay creación de partículas. Para conocer el espectro de las partículas creadas, podemos hallar la transformación de Bogolubov entre las soluciones que tienen los datos (2.75,76) en Σ y aquellas que los tienen en Σ' ; luego la ecuación (2.19) permite calcular el espectro.

2.8 EJEMPLOS

1) v es un vector de Killings en una vecindad \mathcal{N}_Σ de Σ .

Entonces las componentes del tensor métrico en una carta adaptada, son independientes de x^0 en \mathcal{N}_Σ [89]. Por lo tanto en \mathcal{N}_Σ vale que:

$$(2.78) \quad B = 0 \quad C = 0 \quad b = 0 \quad c_k = \omega_k^2$$

$$(2.79) \quad u_k^i = (2\omega_k)^{-1/2} e^{-i\omega_k x^0} E_k(x^i)$$

donde ω_k^2 es la constante de separación. El Hamiltoniano queda:

$$(2.80) \quad H_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k (a_k^{i+} a_k^i + a_k^i a_k^{i+})$$

Varios son los casos conocidos en la literatura que quedan incluidos aquí: observadores de Minkowski y de Rindler en espacio-tiempo plano; observadores comovientes en la métrica de Schwarzschild [82], en la métrica de Einstein estática [51,91] y también los observadores de Killings en el espacio de de Sitter.

2) Observadores geodésicos en un universo de Robertson-Walker.

El intervalo en una carta adaptada se escribe:

$$(2.81) \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + f^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

donde

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & 0 \leq \chi \leq 2\pi & \text{especialmente cerrado (K=1)} \\ \chi & 0 \leq \chi < \infty & \text{especialmente plano (K=0)} \\ \sinh \chi & 0 \leq \chi < \infty & \text{especialmente hiperbólico (K=-1)} \end{cases}$$

La curvatura es:

$$(2.82) \quad R = \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K)$$

y los coeficientes B, C, b y c_k son:

$$(2.83) \quad \begin{aligned} B &= 6\left(\xi - \frac{1}{4}\right) \frac{\dot{a}}{a} & C &= -3\xi \frac{\ddot{a}}{a} \\ b &= 3\frac{\dot{a}}{a} & c_k &= m^2 + \frac{k^2}{a^2} + \frac{6\xi}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K) \end{aligned}$$

donde k^2 es la constante de separación. La condición (2.74) resulta:

$$(2.84) \quad m^2 + \frac{k^2}{a^2} > 6\xi \left[(6\xi - 1) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{K}{a^2} \right]$$

Los datos sobre Σ son:

$$(2.85) \quad \left. \frac{\dot{T}_k}{T_k} \right|_{\Sigma} = -6\xi \frac{\dot{a}}{a} - i \left[m^2 + \frac{k^2 + 6\xi K}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 6\xi (1 - 6\xi) \right]^{1/2} \Big|_{\Sigma}$$

Y la expresión del Hamiltoniano es:

$$(2.86) \quad H_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_k \left[m^2 + \frac{k^2 + 6\xi K}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 6\xi (1 - 6\xi) \right]^{1/2} \Big|_{\Sigma} (a_k^{\xi+} a_k^{\xi} + a_k^{\xi} a_k^{\xi+})$$

En esta ecuación, la suma sobre k tiene un carácter diferente según sea $K=+1$, 0 ó -1 , porque, dependiendo de K , los subíndices de u_k pueden ser discretos o continuos.

La "Escuela Rusa" usa esta prescripción para definir sus vacíos en el universo de Robertson-Walker [75]. Además otros vacíos, como el obtenido mediante el "truco de Wick" por De Witt, el introducido por Charach y Parker [93] mediante una continuación analítica, y el vacío de Chitre y Hartle [94] en un universo en expansión con evolución lineal, basado en una integral de camino de Feynman, son de este tipo, como se probó en las ref.[95-97].

3) Observadores geodésicos en un universo tipo Bianchi I.

El intervalo en una carta adaptada se escribe:

$$(2.87) \quad ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2(t) dx_i^2$$

En este caso la variable t no se separa en la ecuación de campo:

pero existen soluciones de la forma:

$$(2.88) \quad \mu_k = T_k(t) \frac{e^{ik \cdot x}}{(2\pi)^{3/2}}$$

La curvatura es:

$$(2.89) \quad R = 2 \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\ddot{a}_i}{a_i} + \left(\frac{\dot{a}_i}{a_i} \right)^2 \right]$$

Los coeficientes B , C , b , c_k son:

$$(2.90) \quad \begin{aligned} B &= \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{a}_i}{a_i} & C &= -\xi \sum_{i=1}^3 \frac{\ddot{a}_i}{a_i} \\ b &= \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{a}_i}{a_i} & c_k &= \mu^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{k_i}{a_i} \right)^2 + 2\xi \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\ddot{a}_i}{a_i} + \left(\frac{\dot{a}_i}{a_i} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

De manera que los resultados son similares a los del caso anterior [97].

4) Caso conforme.

Consideremos dos espacio-tiempos diferentes tales que en cada uno de ellos hay un sistema de observadores (eventualmente puede tratarse de dos sistemas de observadores distintos en el mismo espacio-tiempo). Supongamos que, cuando los observadores usan ciertas adaptadas, las componentes de los tensores métricos de

ambos espacio-tiempos, $s_{\mu\nu}$ y $\bar{s}_{\mu\nu}$, tienen la siguiente relación:

$$(2.91) \quad \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{z}) = \Omega^2(\bar{z}) g_{\mu\nu}(\bar{z})$$

(indicaremos con $\{x^\mu\}$ y $\{\bar{x}^\mu\}$ a las cartas adaptadas utilizadas por cada uno de los sistemas de observadores),

Entonces:

$$(2.92) \quad d\bar{z} = \Omega^{m-1} dz$$

$$(2.93) \quad \bar{B} = B + \left[2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{4}\right)(m-1) + \frac{1}{2} \right] \frac{\Omega_{,0}}{\Omega}$$

$$(2.94) \quad \begin{aligned} \frac{\bar{C}}{f} = & \frac{C}{f} + (m-1) \left[\left(\frac{\Omega_{,0}}{\Omega} \right)^2 - \frac{\Omega_{,00}}{\Omega} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[\gamma^{ij} \delta_{ij,0} - (m-1) \frac{g_{00,0}}{g_{00}} \right] \frac{\Omega_{,0}}{\Omega} \end{aligned}$$

Definamos:

$$(2.95) \quad \bar{\phi}(\bar{z}) = \Omega^{\frac{2-m}{2}}(\bar{z}) \phi(\bar{z})$$

Entonces, reemplazando (2.91-95) en (2.58), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_\Sigma[\bar{\phi}] = & H_\Sigma[\phi] + \\
& + \left[\frac{1}{2}(n-1) - \frac{n-2}{4} \right] \int_\Sigma d\Sigma \, g_{00}^{-1/2} \left\{ \frac{\Omega_{,0}}{\Omega} (\phi \phi_{,0} + \phi_{,0} \phi) - \right. \\
& \left. - \left[\frac{\Omega_{,00}}{\Omega} + (n-3) \left(\frac{\Omega_{,0}}{\Omega} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\Omega_{,0}}{\Omega} \left(\gamma^{\dot{i}\dot{j}} \gamma_{\dot{i},0} \gamma_{\dot{j},0} - \frac{g_{00,0}}{g_{00}} \right) \right] \phi^2 \right\}
\end{aligned}$$

(2.96)

donde $\bar{H}_\Sigma[\bar{\phi}]$ es el Hamiltoniano construido con $\bar{\phi}$ en la métrica \bar{g} y todas las funciones están evaluadas en las variables $\{\bar{x}^\mu\}$.

Cuando el campo tiene masa nula y $\xi = (n-2)/[4(n-1)]$ (acoplamiento "conforme"), es bien sabido que si ϕ es solución de la ecuación de campo en la métrica g , entonces $\bar{\phi}$ es solución en la métrica \bar{g} [32]. Además, por (2.96) resulta:

$$(2.97) \quad \bar{H}_\Sigma[\bar{\phi}] = H_\Sigma[\phi]$$

La importancia de esta ecuación reside en que, si conocemos la base $\{u_k(x^\mu)\} \cup \{u_k^*(x^\mu)\}$ que diagonaliza y minimiza el Hamiltoniano para el sistema de observadores que mide la métrica $g_{\mu\nu}$ (en la carta adaptada $\{x^\mu\}$), entonces también conocemos que la base

$$(2.98) \quad \left\{ \Omega^{\frac{2-n}{2}}(\bar{x}^\mu) u_k(\bar{x}^\mu) \right\} \cup \left\{ \Omega^{\frac{2-n}{2}}(\bar{x}^\mu) u_k^*(\bar{x}^\mu) \right\}$$

diagonaliza y minimiza el Hamiltoniano para el sistema de observadores que mide la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ (en la carta adaptada $\{\bar{x}^\mu\}$).

Los casos conocidos que quedan incluidos aquí son los "vacíos conformes" de las referencias [85,86,98], el vacío de Kruskal en un agujero negro bidimensional [32], etc.

Este ejemplo muestra que la separación del tiempo natural en la ecuación de campo, no es esencial para diagonalizar y minimizar el Hamiltoniano. En efecto, las funciones de la base (2.98) no serán, en general, de la forma (2.64).

Como vemos en estos ejemplos, el formalismo desarrollado en el capítulo 2 de esta Tesis, es capaz de contener los vacíos que tienen un aceptación generalizada en la literatura. Pero debe destacarse que estos vacíos ya reconocidos, tenían su base de sustentación en propiedades particulares de las condiciones en que funcionaban. Por ejemplo, los modos (2.79), utilizados para cuantificar el campo en un sistema de observadores Killins, se elegían por ser autofunciones del generador de las traslaciones temporales, aprovechando que tales traslaciones dejan invariante a la métrica. Así, las condiciones particulares del espacio-tiempo en que se trabajaba, permitían encontrar un conjunto de modos privilegiado (que, por otra parte, eran los que más se parecían a los modos minkowskianos).

De la misma forma, para definir el estado de vacío en los casos conformes, se aprovechaba la similitud de la base (2.98) con respecto a alguna base ya utilizada para cuantificar en otro espacio-tiempo.

Por otra parte, rara vez se hacía mención del papel jugado por los observadores. Debe destacarse en este sentido las ref.[85,86], en donde se estudian las cuantificaciones de un campo de masa nula, realizadas por distintos observadores en un espacio-tiempo bidimensional y plano, aprovechando las propiedades de invariancia conforme.

Por el contrario, en el trabajo aquí expuesto intentamos prescribir cómo elige el vacío cada conjunto de observadores, sin recurrir a ninguna propiedad particular de la geometría, del fluido de referencia ni del campo [99-101]. En este sentido caben mencionarse también las ref.[102,103].

No queremos finalizar el capítulo sin señalar que la cuantificación de un campo en el espacio-tiempo curvo enfrenta dos problemas importantes. Uno de ellos es el abordado en el capítulo 2 de esta tesis, es decir, el problema de resolver la ambigüedad en la elección del vacío. El otro problema proviene de que la teoría conduce a divergencias y hay que renormalizarla [31]. Las técnicas de renormalización son diversas: "point-splitting" [104,105], renormalización de Hadamard [106,107], etc. Por lo tanto, resulta necesario verificar si nuestra prescripción para la elección del vacío conduce a una teoría renormalizable [92], cosa que ocurre en ciertos casos y no ocurre en otros. Cuando el vacío que diagonaliza el Hamiltoniano produce un valor de expectación del tensor de energía-momento renormalizado que es finito, diremos que disponemos de un "buen" vacío. Podrán realizarse con él todas las operaciones y cálculos que normalmente se realizan con el vacío ordinario en el espacio-tiempo plano y con observadores

inerciales. De esta manera, los vacíos que satisfacen estas dos propiedades, resuelven el problema de la definición de vacío en espacio-tiempos curvos [97] y para observadores cualesquiera.

CAPITULO 3

COSMOLOGIA DE JUGUETE

3.1 ESPEJOS MOVILES: UN ANALOGO COSMOLOGICO

Una vez resuelta la cuestión de averiguar cuál es el espacio de Fock de los estados cuánticos del campo, podemos intentar atacar el problema de la cosmología semiclásica. Esto implica resolver un sistema de ecuaciones acopladas. Por un lado, la ecuación de campo (2.1), que gobierna la dinámica del operador de campo. Por el otro lado, la ecuación de Einstein, que gobierna la evolución de la geometría, y tiene como fuente el valor de expectación del tensor de energía-momento del campo. La solución de este sistema presenta dificultades de cálculo considerables. Por lo tanto, para comenzar es conveniente reemplazar el problema por otro análogo que tenga una naturaleza más simple.

El análogo más sencillo parece ser un sistema de espejos móvil

en presencia de un campo cuantificado, en un espacio-tiempo plano. En efecto, existen varios trabajos en la literatura sobre espejos y campos cuantificados. La historia comienza con el descubrimiento del Efecto Casimir [37,48-53], consistente en que si un campo cuantificado está en presencia de dos espejos descargados infinitos, planos y paralelos, el valor de expectación de vacío del tensor energía-momento regularizado no es nulo, sino que es:

$$\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{reg} = \frac{\pi^2}{1440 d^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.1)

donde d es la distancia entre espejos y la dirección x es perpendicular a éstos (en el caso de un campo electromagnético debe multiplicarse (3.1) por un factor 2 para tener en cuenta las dos polarizaciones). Como consecuencia de (3.1), debe existir una fuerza de atracción (Fuerza de Casimir) entre los espejos. Esta fuerza ha sido medida [42-47].

Posteriormente se hicieron investigaciones sobre los efectos producidos por el movimiento de espejos [54-66], concluyéndose que los espejos móviles son capaces de producir creación de cuantos de campo. Este es el aspecto que nos interesa a los efectos de buscar un análogo cosmológico. Como fue señalado en el capítulo 2, la evolución del universo puede conducir a la creación de cuantos de campo. Estos cuantos creados reaccionan sobre la geometría, apareciendo en la fuente de la ecuación de Einstein.

Del mismo modo la evolución de los espejos puede crear partículas, las cuales reaccionan sobre los espejos ejerciéndoles una presión de radiación. De manera que un sistema formado por un campo cuantificado y espejos móviles sin cuantificar será un simil de la cosmología semiclásica. Llamaremos a este modelo "Cosmología de Juguete" [108].

3.2 LA CUANTIFICACION DEL CAMPO

Trabajaremos, por simplicidad, con un campo escalar hermitico de masa nula, en un espacio-tiempo plano bidimensional.

Si consideramos dos espejos iguales (de igual masa M), sus movimientos serán simétricos; es decir que eligiendo el origen de coordenadas en el centro de masa, las posiciones de los espejos a tiempo t serán:

$$(3.2) \quad x_1(t) = -q(t) \quad x_2(t) = q(t)$$

donde $q(t)$ es una función incógnita.

La acción de los espejos sobre el campo, consiste en fijar condiciones de contorno. Pediremos que el campo se anule sobre los espejos:

$$(3.3) \quad \phi(t, x = -q(t)) = \phi(t, x = q(t)) = 0$$

La ecuación de campo es:

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

Para cuantificar el campo debemos definir el fluido de observadores. Naturalmente, la presencia de los espejos indica que este fluido deberá adaptarse a los espejos. En otras palabras, la línea de universo de cada espejo debe coincidir con una línea de fluido. Si (T, X) es una carta adaptada a algún sistema de observadores, podemos elegir X tal que las coordenadas que corresponden a los espejos sean:

$$(3.5) \quad X_1 = -D \quad X_2 = D \quad \forall T$$

Entonces las condiciones de contorno (3.3) resultarán:

$$(3.6) \quad \phi(T, X=-D) = \phi(T, X=D) = 0$$

Veamos una posible forma de definir un fluido de referencia, cuando los espejos se mueven según (3.2). Con ese fin introduciremos el siguiente cambio de carta [54,59]:

$$(3.7.a) \quad T + X = R(t+x)$$

$$(3.7.b) \quad T - X = R(t-x)$$

donde R es una función a ser determinada. Para que se satisfaga (3.5), R debe cumplir la siguiente ecuación funcional:

$$(3.8) \quad R[t+q(t)] - R[t-q(t)] = 2D$$

(ver en el Apéndice B un método gráfico para resolver esta ecuación).

El intervalo en la nueva carta resulta:

$$(3.9) \quad dt^2 - dx^2 = F'(T-X) F'(T+X) [dT^2 - dX^2]$$

donde:

$$(3.10) \quad F = R^{-1}$$

y la prima indica derivación respecto del argumento.

Para que el cambio de coordenadas (3.7) sea una bisección, la función R debe ser monótona. Por lo tanto R' siempre tiene el mismo signo. Lo mismo ocurre con F' . Esto garantiza en (3.9) el carácter temporal de la coordenada T y el carácter espacial de X .

Por otra parte, la ecuación de campo (3.4) en la nueva carta queda:

$$(3.11) \quad R'[F(T-X)] R'[F(T+X)] \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right] = 0$$

y como R' nunca se anula:

$$(3.12) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = 0$$

(De paso digamos que las coordenadas de Rindler son un caso particular de coordenadas (T, X) . Como se ve en (3.9) hicimos un cambio de coordenadas conforme).

Observemos que es posible pensar que la carta (T, X) es una carta adaptada de algún sistema de observadores. En efecto, las líneas $X = \text{cte.}$ son temporales y ortogonales a las líneas espaciales $T = \text{cte.}$ (ver (3.9)), y los espejos corresponden a líneas $X = \text{cte.}$ (luego veremos que además el fluido resulta irrotacional).

Como hay muchas funciones R que resuelven (3.8) para una dada $q(t)$ (ver Apéndice B), hemos generado entonces una familia de sistemas de observadores [85, 86, 101]. Hay una correspondencia biunívoca entre las funciones R que resuelven (3.8) y los sistemas de referencia de esta familia. Dada una R solución de (3.8), queda definido el campo vectorial \mathbf{v} que caracteriza al sistema de observadores. Teniendo en cuenta que en la carta adaptada es $v^0 = 1, v^i = 0$ (ver (2.41.b)), se tiene que las componentes de \mathbf{v} en la carta (t, x) son:

$$(3.13.a) \quad \begin{aligned} v^t &= \frac{\partial t}{\partial T} v^T + \frac{\partial t}{\partial X} v^X = \frac{\partial t}{\partial T} = \frac{1}{2} \left[F'(T+X) + F'(T-X) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R'(t+x)} + \frac{1}{R'(t-x)} \right] \end{aligned}$$

$$v^x = \frac{\partial x}{\partial \tau} v^\tau + \frac{\partial x}{\partial X} v^X = \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left[F'(T+X) - F'(T-X) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R'(t+x)} - \frac{1}{R'(t-x)} \right]$$

(3.13.b)

Es fácil ver que el campo v tiene rotor y divergencia nulos:

(3.14.a)

$$v^t_{,x} - v^x_{,t} = 0$$

(3.14.b)

$$v^t_{,t} - v^x_{,x} = 0$$

Por supuesto existen muchos otros sistemas de observadores posibles, además de los que integran esta familia. Sin embargo los sistemas que acabamos de definir gozan de una propiedad interesante. Como hemos visto en la sección 2.2, el contenido de partículas de un estado cuántico, depende de quien lo observe. Del mismo modo puede ocurrir que en un sistema de referencia se observe creación de partículas y en otro no. Los sistemas de observadores definidos por (3.13), (3.8), tienen la propiedad de que en ellos la noción de vacío es independiente del tiempo. Es decir que el mismo estado que es vacío en un instante T continúa siéndolo en cualquier otro instante. En efecto es inmediato ver que los modos:

(3.15)

$$\mu_m = (m\pi)^{-1/2} e^{-i\frac{m\pi}{2} \frac{T}{D}} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \left(\frac{X}{D} - 1 \right), \quad m \in \mathbb{N}$$

resuelven la ecuación de campo (3.16) con las condiciones de contorno (3.6), y además poseen los datos que diagonalizan y minimizan el Hamiltoniano en cualquier instante T (ver en la sección 2.8 el "Caso conforme"). Por lo tanto, en un sistema de observadores definido por (3.13) y (3.8) no se observa creación de partículas.

Sin embargo esta conclusión no es, en general, válida para sistemas de observadores que no pertenezcan a la familia. Por ejemplo en la ref.[60] se ha calculado el espectro de partículas creadas en movimientos "in-out" (los estados inicial y final son estáticos), tal como es percibido por observadores que son estáticos (minkowskianos) en las regiones "in" y "out".

Para los cálculos posteriores, convendrá tener escritos los modos (3.15) en función de (t,x) :

$$\mu_m = (2i\sqrt{m\pi})^{-1} \left[e^{-i\frac{m\pi}{2D}[R(t-x)+1]} - e^{-i\frac{m\pi}{2D}[R(t+x)-1]} \right]$$

(3.16)

 $m \in \mathbb{N}$

Obviamente, para conocer la solución, deberemos resolver la ecuación (3.8). El problema de resolver la ecuación de campo se ha transferido a (3.8).

3.3 LA ECUACION DINAMICA PARA LOS ESPEJOS

Para completar el sistema de ecuaciones que gobiernan la Cosmología de Jugete, necesitamos una ecuación de movimiento para los espejos, es decir una ecuación cuya incógnita sea $q(t)$. Como ya dijimos, los espejos no están cuantificados. Por lo tanto la ecuación debe ser de la forma:

$$(3.17) \quad F = M \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{q}(t)}{\sqrt{1 - \dot{q}^2(t)}} \right]$$

donde F es la fuerza que el campo ejerce sobre el espejo ubicado en $x = q(t)$. La fuerza de un campo sobre un contorno móvil no es conocida; debemos idear una forma de averiguarla. Para ello consideremos la acción de un campo en presencia de dos superficies temporales (los contornos) σ_1 y σ_2 :

$$(3.18) \quad S = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x$$

donde Σ_1 y Σ_2 son dos hipersuperficies espaciales y \mathcal{L} es el Lagrangiano del campo. Como el campo satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, la variación de la acción por un cambio arbitrario del campo y las coordenadas es:

$$(3.19) \quad \delta S = F[\Sigma_2] + F[\Sigma_1] + F[\sigma_2] + F[\sigma_1]$$

donde

$$(3.20) \quad F[\sigma] \equiv \int_{\sigma} j^{\mu} d\sigma_{\mu}$$

y

$$(3.21) \quad j^{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \delta_0 \phi + \mathcal{L} \delta x^{\mu}$$

(ver [B1]), $d\sigma_{\mu}$ o $d\Sigma_{\mu}$ es exterior al volumen limitado por σ_1 , σ_2 , Σ_1 y Σ_2 .

La acción de un campo libre es invariante por traslaciones:

$$(3.22) \quad \delta x^{\nu} = \epsilon^{\nu} = \text{cte.} \quad \delta_0 \phi = -\epsilon^{\nu} \partial_{\nu} \phi$$

En tal caso es:

$$(3.23) \quad j^{\mu} \equiv -\epsilon^{\nu} T^{\mu\nu}$$

(ver [B1]), donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento del campo. Esta invariancia debe permanecer en presencia de contornos (trasladar los contornos es equivalente a hacer el experimento en otro lugar). Entonces haciendo $\delta S=0$ en (3.19) y reemplazando (3.20) y (3.23):

$$(3.24) \quad \int_{\Sigma_2} T^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu} + \int_{\Sigma_1} T^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu} = - \int_{\sigma_2} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} - \int_{\sigma_1} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu}$$

Tomando a Σ_1 y Σ_2 como hipersuperficies $t=\text{cte.}$:

$$(3.25) \quad P^{\nu}(t_2) - P^{\nu}(t_1) = - \int_{\sigma_2} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} - \int_{\sigma_1} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu}$$

donde P^ν es el cuadrimpulso del campo. Como el cuadrimpulso de todo el sistema se debe conservar, llegamos a la conclusión que los términos del miembro derecho en (3.25) corresponden a las variaciones del cuadrimpulso de los contornos:

$$(3.26) \quad \Delta p_\sigma^\nu = \int_\sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\mu$$

donde p_σ^ν es el cuadrimpulso del contorno σ y $d\sigma_\mu$ apunta hacia la región donde no hay campo.

Si el espacio-tiempo es bidimensional, tenemos:

$$(3.27) \quad d\sigma_0 = dx = \dot{q}(t) dt \quad d\sigma_1 = dt$$

luego en un intervalo dt resulta:

$$(3.28) \quad dp_\sigma^\nu = T^{0\nu}(t, x=q(t)) \dot{q}(t) dt + T^{1\nu}(t, x=q(t)) dt$$

Esta ecuación enseña que la fuerza del campo sobre el contorno es:

$$(3.29) \quad T^{01}(t, x=q(t)) \dot{q}(t) + T^{11}(t, x=q(t)) = \frac{dp_0^1}{dt}$$

Cuando el campo está cuantificado, el miembro de la izquierda es un operador. Entonces, con el espíritu de la cosmología semiclásica, usaremos el valor de expectación de ese operador a modo de fuerza.

Como condición inicial para el movimiento de los espejos,

consideraremos el reposo:

$$(3.30) \quad q(t) = q_{in} \quad \forall t \leq 0$$

y como estado cuántico del campo utilizaremos el estado $|0_M \text{ in}\rangle$ que es vacío para observadores que son estáticos (minkowskianos) cuando $t \leq 0$. Ahora bien, a los observadores que son minkowskianos cuando $t \leq 0$, les corresponde según (3.13), una función ${}^{\text{in}}R_M$ tal que:

$$(3.31) \quad \frac{1}{{}^{\text{in}}R'_M(t+x)} - \frac{1}{{}^{\text{in}}R'_M(t-x)} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall t \leq 0 \\ -q_{in} \leq x \leq q_{in} \end{array}$$

es decir que:

$$(3.32) \quad {}^{\text{in}}R'_M(z) = \text{cte.} \quad z \leq q_{in}$$

Por otro lado, como R debe ser solución de (3.8) resulta que:

$$(3.33) \quad {}^{\text{in}}R_M(z) = \frac{D}{q_{in}} z + \text{cte.} \quad z \leq q_{in}$$

Es decir que la base de soluciones asociada al estado cuántico que hemos escogido, es la (3.16), construida con una solución de (3.8) que tiene el comportamiento inicial (3.33).

Para evaluar el valor de expectación de $T^{\mu\nu}$ en el estado $|0_M \text{ in}\rangle$, podemos desarrollar el campo en los modos (3.16), reemplazar en (2.43) ($\phi_{in} = \psi = R = 0$) y tomar luego el valor de expectación. Como

es sabido, la teoría conduce a divergencias que hay que regularizar. Una forma de hacer esto consiste en tomar los anticonmutadores de (2.43), evaluando a uno de los factores en x y al otro en $x+\epsilon$ ("point-splitting", ver [54]). En esa forma el valor de expectación resulta finito. Para tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$, se hace un desarrollo de Laurent en torno a $\epsilon=0$ y se eliminan los términos divergentes. El resultado finito es el valor de expectación regularizado.

Usando "point-splitting" obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle_{M, in} &= \langle T_{xx} \rangle_{M, in} \\ \langle T_{tx} \rangle_{M, in} &= \langle T_{xt} \rangle_{M, in} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{16D} \sum_{m=1}^{\infty} m\pi \left\{ {}^m R'_m(v) {}^m R'_m(v+\epsilon) e^{\frac{i m \pi}{2D} [{}^m R_m(v+\epsilon) - {}^m R_m(v)]} \right.$$

$$\left. \pm {}^m R'_m(u) {}^m R'_m(u+\epsilon) e^{\frac{i m \pi}{2D} [{}^m R_m(u+\epsilon) - {}^m R_m(u)]} \right\}$$

(3.34)

donde

$$(3.35) \quad u = t - x \quad v = t + x$$

La ecuación (3.34) es idéntica a la ecuación (7.3) de [54], si se reemplaza en la anterior R por $R/2D$. (En [54] hay un π equivocado en el divisor). Luego por comparación con (7.4-6) de [54]:

$$(3.36.a) \quad \langle T_{tt} \rangle_{M;in}^{reg} = \langle T_{xx} \rangle_{M;in}^{reg} = - \left[{}^in f_m(u) + {}^in f_m(v) \right]$$

$$(3.36.b) \quad \langle T_{tx} \rangle_{M;in}^{reg} = \langle T_{xt} \rangle_{M;in}^{reg} = {}^in f_m(u) - {}^in f_m(v)$$

donde:

$$(3.37) \quad {}^in f_m \equiv \frac{1}{24\pi} \left[\frac{{}^in \rho_m'''}{{}^in \rho_m'} - \frac{3}{2} \left(\frac{{}^in \rho_m''}{{}^in \rho_m'} \right)^2 + \frac{\pi^2}{8D^2} \left({}^in \rho_m' \right)^2 \right]$$

sinetizando los resultados de esta sección, la ecuación dinámica para los espejos es:

$$(3.38) \quad - {}^in f_m(t-q(t)) (1+\dot{q}(t)) - {}^in f_m(t+q(t)) (1-\dot{q}(t)) = M \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{q}(t)}{\sqrt{1-\dot{q}^2(t)}} \right]$$

con la condición inicial (3.30):

$$(3.30) \quad q(t) = q_{in} \quad \forall t \leq 0$$

Mientras que la ecuación de campo ha sido reemplazada por la ecuación (3.8):

$$(3.8) \quad {}^in R_m [t + q(t)] - {}^in R_m [t - q(t)] = 2D$$

con la condición inicial (3.33):

$$(3.39) \quad {}^{\text{in}}R_M(z) = \frac{D}{q_{\text{in}}} z \quad z \leq q_{\text{in}}$$

(eliminamos el término independiente porque sólo agrega una fase a los modos (3.16)).

En las secciones siguientes resolveremos en forma numérica, el sistema (3.38)-(3.8), con las condiciones (3.30)-(3.40).

3.4 TECNICAS NUMERICAS

Para resolver el sistema de ecuaciones, dividiremos el semieje $t > 0$ en pequeños intervalos $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Supondremos que la fuerza F sobre el espejo es constante en cada intervalo. La solución de la ecuación (3.17) cuando la fuerza es constante es:

$$(3.40) \quad q_{k+1} = q_k - \frac{M}{F_k \sqrt{1 - \dot{q}_k^2}} + \frac{M}{F_k} \sqrt{1 + \left(\frac{F_k \Delta t}{M} + \frac{\dot{q}_k}{\sqrt{1 - \dot{q}_k^2}} \right)}$$

donde $q_k = q(t_k)$. Para comenzar, conocemos el valor de $q_0 = q(t=0)$ y de $\dot{q}_0 = \dot{q}(t=0)$, para construir $F_k = F(t_k)$ necesitamos conocer las derivadas primera, segunda y tercera de la función ${}^{\text{in}}R_M(z)$ en $z = t_k \pm q_k$ (ver (3.37-38)). De acuerdo con (3.39) también conocemos el valor inicial de la fuerza $F_0 = F(t=0)$. Por lo tanto, la ecuación (3.40) nos permite averiguar el valor de $q(t)$ en el instante siguiente. Conociendo

q_{k+1} , podemos progresar en el conocimiento de R_M mediante la ecuación (3.8), para luego computer F_{k+1} y así siguiendo.

Mencionaremos los aspectos más importantes del programa de cálculo:

1.- En la evaluación de las derivadas primera, segunda y tercera de la función R_M , usamos las siguientes ecuaciones, obtenidas por derivación de (3.8):

$$R'[t+q(t)] = R'[t-q(t)] \left[\frac{1-\dot{q}(t)}{1+\dot{q}(t)} \right] \quad (3.41)$$

$$R''[t+q(t)] = R''[t-q(t)] \left[\frac{1-\dot{q}(t)}{1+\dot{q}(t)} \right]^2 - \frac{2\ddot{q}(t)}{(1+\dot{q}(t))^3} R'[t-q(t)] \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} R'''[t+q(t)] = & R'''[t-q(t)] \left[\frac{1-\dot{q}(t)}{1+\dot{q}(t)} \right]^3 - \\ & - 2 R''[t-q(t)] \frac{\ddot{q}(t) (1-\dot{q}(t)) (3+\dot{q}(t))}{(1+\dot{q}(t))^4} - \\ & - 2 R'[t-q(t)] \frac{\ddot{q}(t) (1+\dot{q}(t)) - 2 \dot{q}(t)^2}{(1+\dot{q}(t))^4} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Cada nuevo valor computado en $z = t_k + q_k$ fue registrado en la

memoria, mientras que los valores en $z = t_k - q_k$ fueron buscados en la memoria o interpolados linealmente.

2.- Los valores \dot{q}_{k+1} y \ddot{q}_{k+1} fueron computados derivando la solución (3.40):

$$(3.44) \quad \dot{q}_{k+1} = \left[\frac{F_k}{M} \Delta t + \frac{\dot{q}_k}{\sqrt{1 - \dot{q}_k^2}} \right] \left\{ 1 + \left[\frac{F_k}{M} \Delta t + \frac{\dot{q}_k}{\sqrt{1 - \dot{q}_k^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$$

$$(3.45) \quad \ddot{q}_{k+1} = \frac{F_k}{M} \left\{ 1 + \left[\frac{F_k}{M} \Delta t + \frac{\dot{q}_k}{\sqrt{1 - \dot{q}_k^2}} \right]^2 \right\}^{-3/2}$$

El valor \ddot{q}_{k+1} fue calculado por cociente de incrementos:

$$(3.46) \quad \ddot{q}_{k+1} = \frac{\dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k}{\Delta t}$$

3.- La elección de Δt debe hacerse con cierto cuidado. Consideremos las primeras determinaciones de la evolución del sistema, en $t_0 = 0$ y en $t_1 = \Delta t$. Usando (3.30), (3.37-43), resulta:

$$F_0 = - \frac{\pi}{96 q_{in}^2}$$

$$\dot{q}_1 = - \frac{\pi \Delta t}{96 q_{in}^2 M} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi \Delta t}{96 q_{in}^2 M} \right)^2 \right\}^{-1/2}$$

$$\ddot{q}_1 = - \frac{\pi}{96 q_{in}^2 M} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi \Delta t}{96 q_{in}^2 M} \right)^2 \right\}^{-3/2}$$

Para que la variación de velocidad en Δt sea pequeña, tomamos:

$$\Delta t \ll \frac{96 q_{in}^2 M}{\pi}$$

Teniendo esto en cuenta, el valor de F_1 es:

$$F_1 \simeq - \frac{\pi}{96 q_{in}^2} + \frac{\ddot{q}_1}{12 \pi \Delta t} + \frac{\ddot{q}_1^2}{12 \pi} \simeq - \frac{\pi}{96 q_{in}^2} - \frac{1}{1152 q_{in}^2 M \Delta t}$$

donde usamos (3.46). Por lo tanto para satisfacer la aproximación $F = \text{cte.}$ en Δt (es decir: $|F_1 - F_0| \ll |F_0|$), Δt debe ser:

$$(3.47) \quad \frac{1}{12 \pi M} \ll \Delta t \ll \frac{96 q_{in}^2 M}{\pi}$$

Vemos que para encontrar un valor de Δt que satisfaga (3.47), la masa de los espejos no puede ser elegida arbitrariamente.

4.- Resulta de interés estudiar la posibilidad de que el sistema

evolucione hacia algún estado final de "equilibrio"; por ejemplo, que $\langle 0_M; \text{in} | T^0 | 0_M; \text{in} \rangle$ tienda a cero y, por lo tanto, los espejos alcancen una velocidad final constante. Sin embargo, es fácil ver que esto no es posible con las condiciones iniciales que hemos planteado. En efecto, calculando la energía inicial del sistema, y la energía final que tendría en ese estado de "equilibrio", obtenemos:

$$E_{\text{inicial}} = 2M + \int dx \langle 0_M; \text{in} | T_{\text{inicial}}^0 | 0_M; \text{in} \rangle = 2M - \frac{\pi}{48 g_{\text{in}}}$$

$$E_{\text{final}} = \frac{2M}{\sqrt{1 - \dot{q}_{\text{final}}^2}}$$

En cuyo caso $E_{\text{final}} > E_{\text{inicial}}$. De manera que si nos interesa explorar la posible ocurrencia de un estado final de "equilibrio", deberemos aumentar de alguna forma la energía inicial del sistema. Por ejemplo, podemos modificar las condiciones iniciales para el movimiento de los espejos, o bien utilizar otro estado cuántico del campo. Preferimos sin embargo, entregar la energía por medio de fuerzas externas aplicadas sobre los espejos durante los primeros instantes de la evolución. De esta forma la ecuación para el balance de energía queda:

$$(3.48) \quad -\frac{\pi}{48 g_{\text{in}}} + 2M + W_{\text{ext}} = \frac{2M}{\sqrt{1 - \dot{q}_{\text{final}}^2}}$$

donde W_{ext} es el trabajo de las fuerzas externas. Utilizamos los

tipos de fuerza externa:

$$(3.49) \quad \text{tipo 1:} \quad F_{\text{ext}(1)}(t) = a \exp \left\{ - \left[\frac{t}{2|a|} - \sqrt{\ln(20 q_{\text{in}}^2 |a|)} \right]^2 \right\}$$

$$(3.50) \quad \text{tipo 2:} \quad F_{\text{ext}(2)}(t) = a \left\{ 1 + \left[\frac{t}{2a} - \sqrt{20 a q_{\text{in}}^2 - 1} \right]^2 \right\}^{-1}$$

donde a es el valor máximo de F_{ext} .

mediante la ecuación (3.48) podemos verificar la validez de los resultados del programa. Si se obtiene como resultado del programa, que la velocidad de los espejos tiende a un valor constante, entonces ese valor debe ser el que resulte de (3.48) (para lo cual el programa computa también el trabajo externo).

3.5 PRINCIPALES RESULTADOS

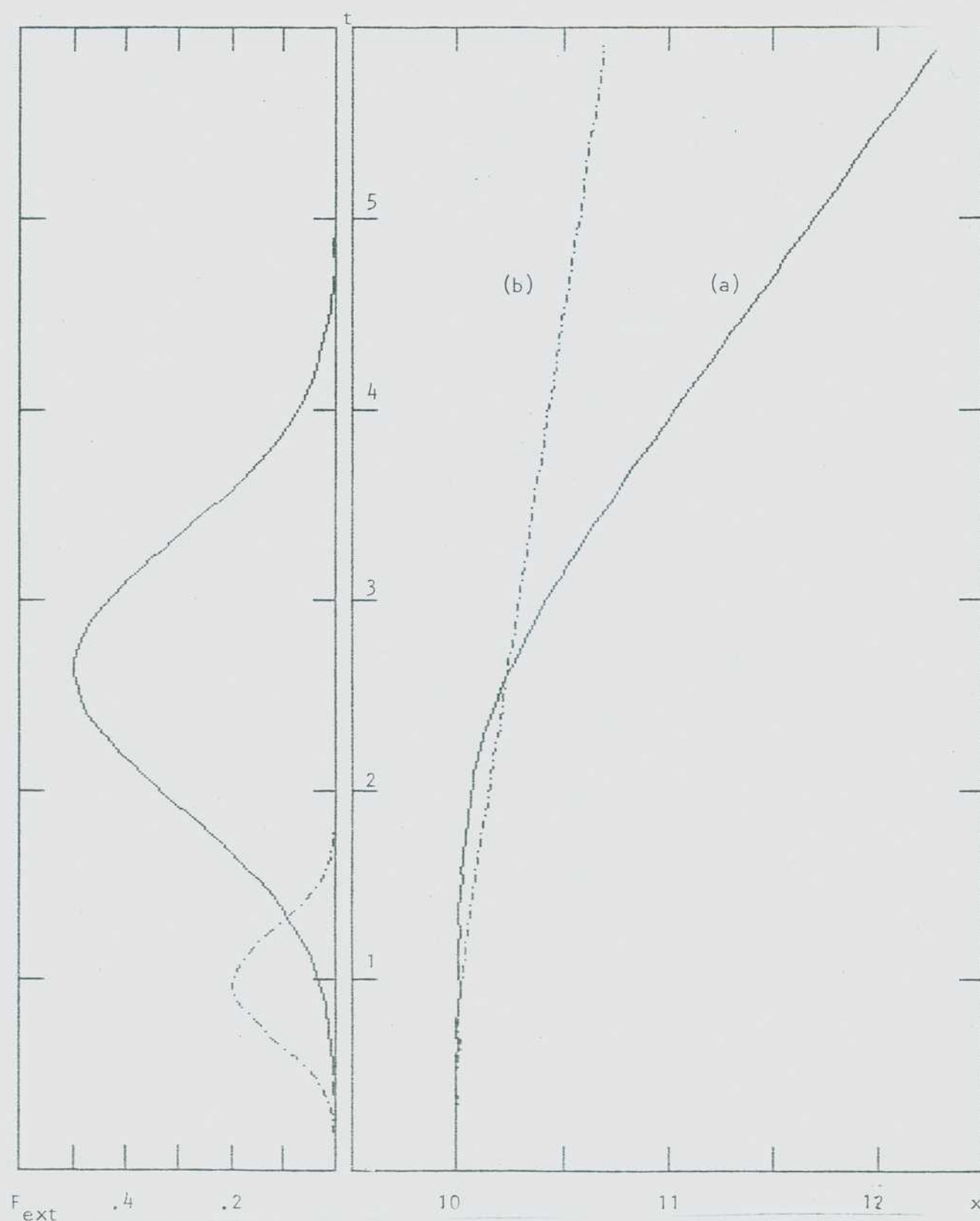
Enumeramos a continuación los principales resultados obtenidos:

1. Si el trabajo externo W_{ext} es mayor que la energía inicial del campo, entonces los espejos tienden a un estado final con velocidad constante, cuyo valor está en buen acuerdo

con la ecuación (3.48), para ambos tipos de fuerza (ver (3.49-50)). En las Fig.2, 3 y 4. se grafican los movimientos obtenidos y las fuerzas externas aplicadas (en unidades naturales). En cada gráfico se incluye el valor de \dot{q}_{final} que resulta de (3.48), el cual puede ser comparado con el obtenido por cálculo numérico.

Por lo tanto la Cosmología de Juguete evoluciona hacia un estado final de equilibrio, siempre que disponga de suficiente energía inicial.

2. La Fig.5 muestra la fuerza del campo sobre el espejo de la derecha, correspondiente al caso (b) de la Fig.2. Las oscilaciones que se observan (la primera de ellas se amplía en la Fig.6) pueden ser interpretadas como reliquias de la acción de la fuerza externa. En efecto, estos pulsos ocurren en los instantes en que los espejos serían alcanzados por una señal que, viajando a la velocidad de la luz, hubiera partido desde los espejos cuando actuó la fuerza externa, y luego hubiera permanecido rebotando entre ellos.
3. Entre dos pulsos consecutivos, la fuerza del campo tiene carácter atractivo y es levemente creciente (en valor absoluto). Llamaremos "estables" a estos tramos. En la Fig.5, los puntos donde comienza cada tramo estable satisfacen una ley inversamente proporcional al cuadrado.

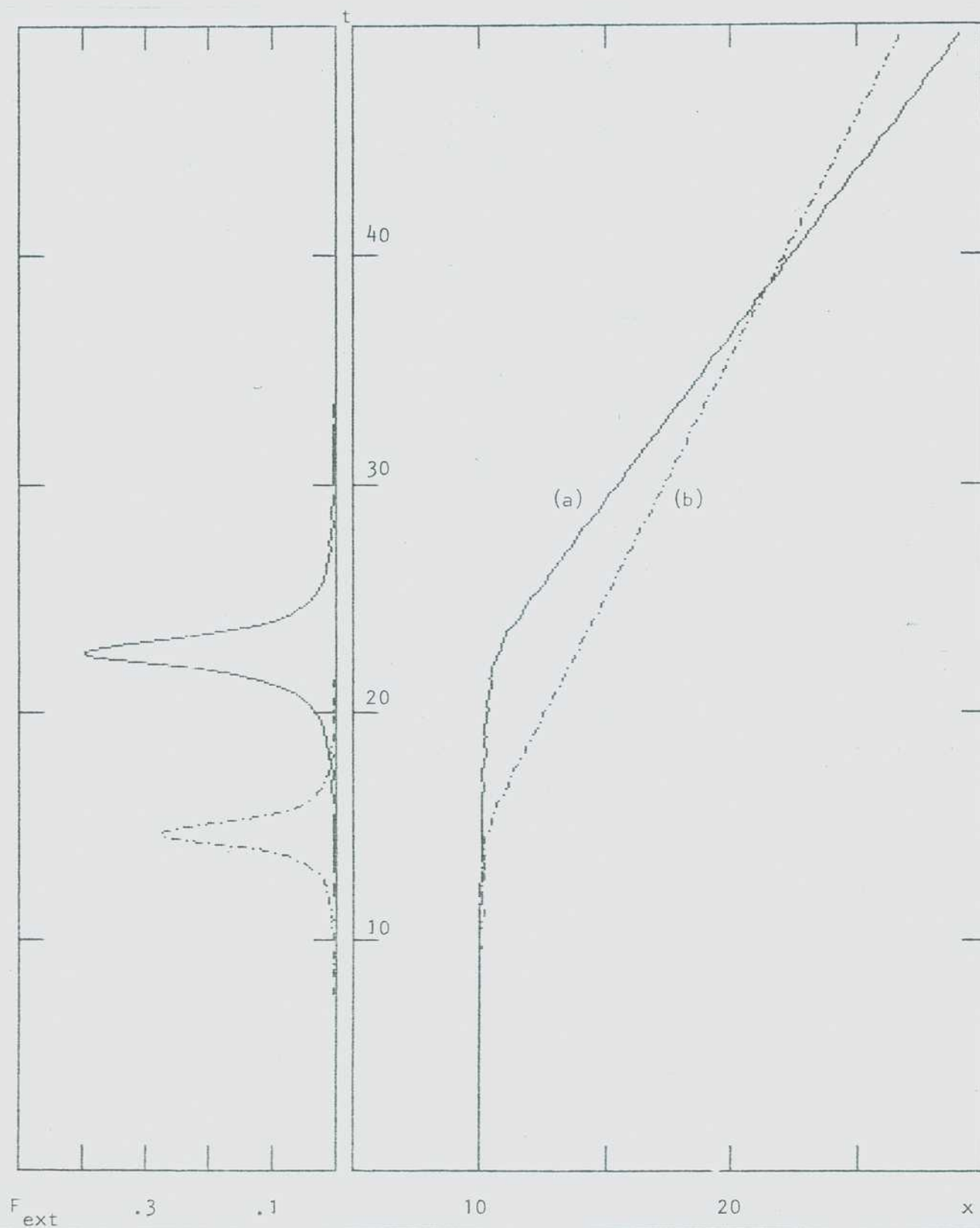


Fis.21: Solución numérica de la Cosmología de Jusuete. A la izquierda se muestra, en función del tiempo, la Fuerza externa aplicada sobre los espejos. A la derecha se muestra la función $x = q(t)$ obtenida.

Datos: $M = 1$, $q_{in} = 10$, fuerza externa (3.49).

a) $a = 0.5$, $\dot{q}_{final} = 0.66$

b) $a = 0.2$, $\dot{q}_{final} = 0.12$



Fis.3: Solución numérica de la Cosmología de Jusuete. A la izquierda se muestra, en función del tiempo, la Fuerza externa aplicada sobre los espejos. A la derecha se muestra la función $x = q(t)$ obtenida.

Datos: $M = 1$, $q_{in} = 10$, fuerza externa (3.50).

a) $a = 0.4$, $\dot{q}_{final} = 0.70$

b) $a = 0.3$, $\dot{q}_{final} = 0.47$

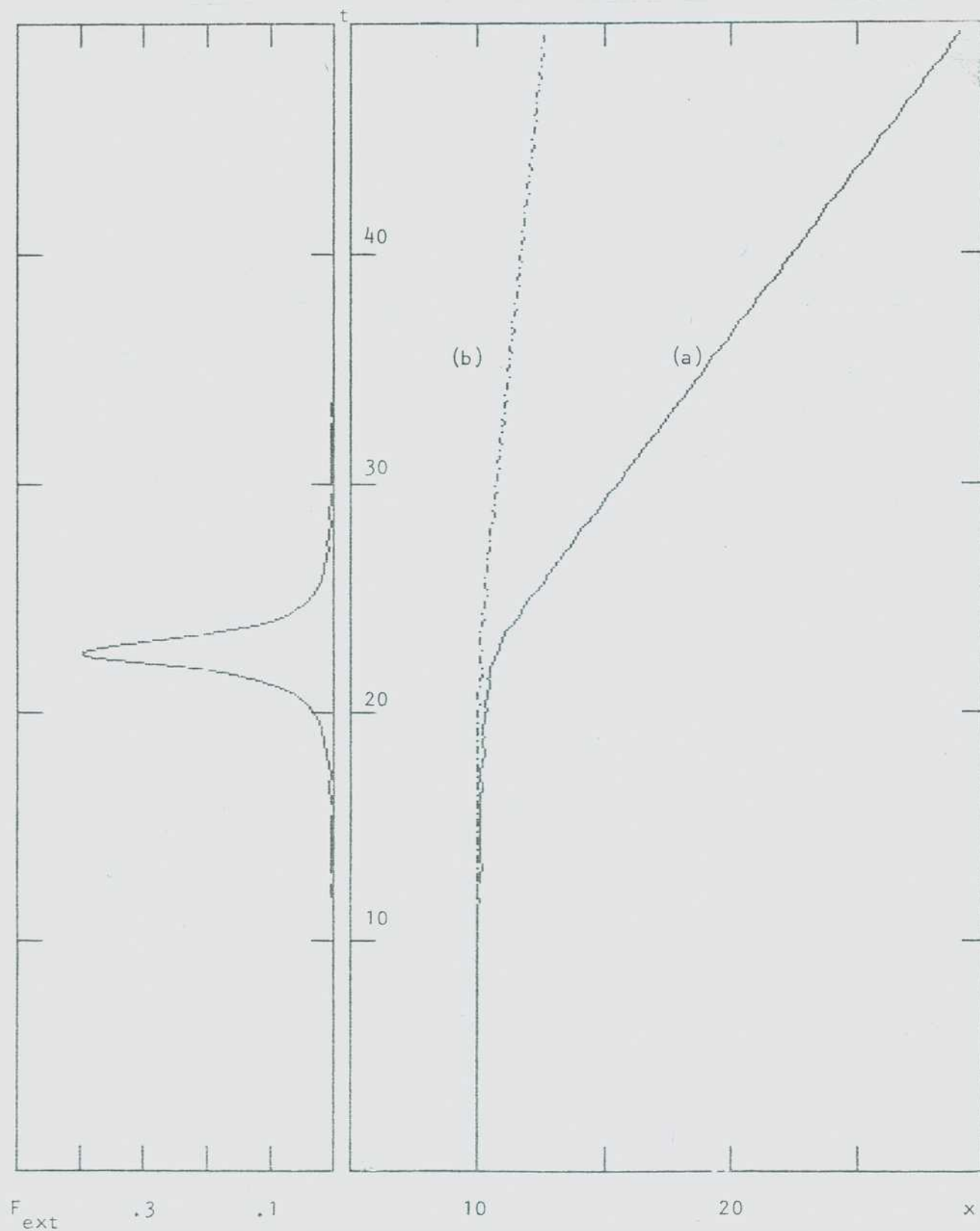
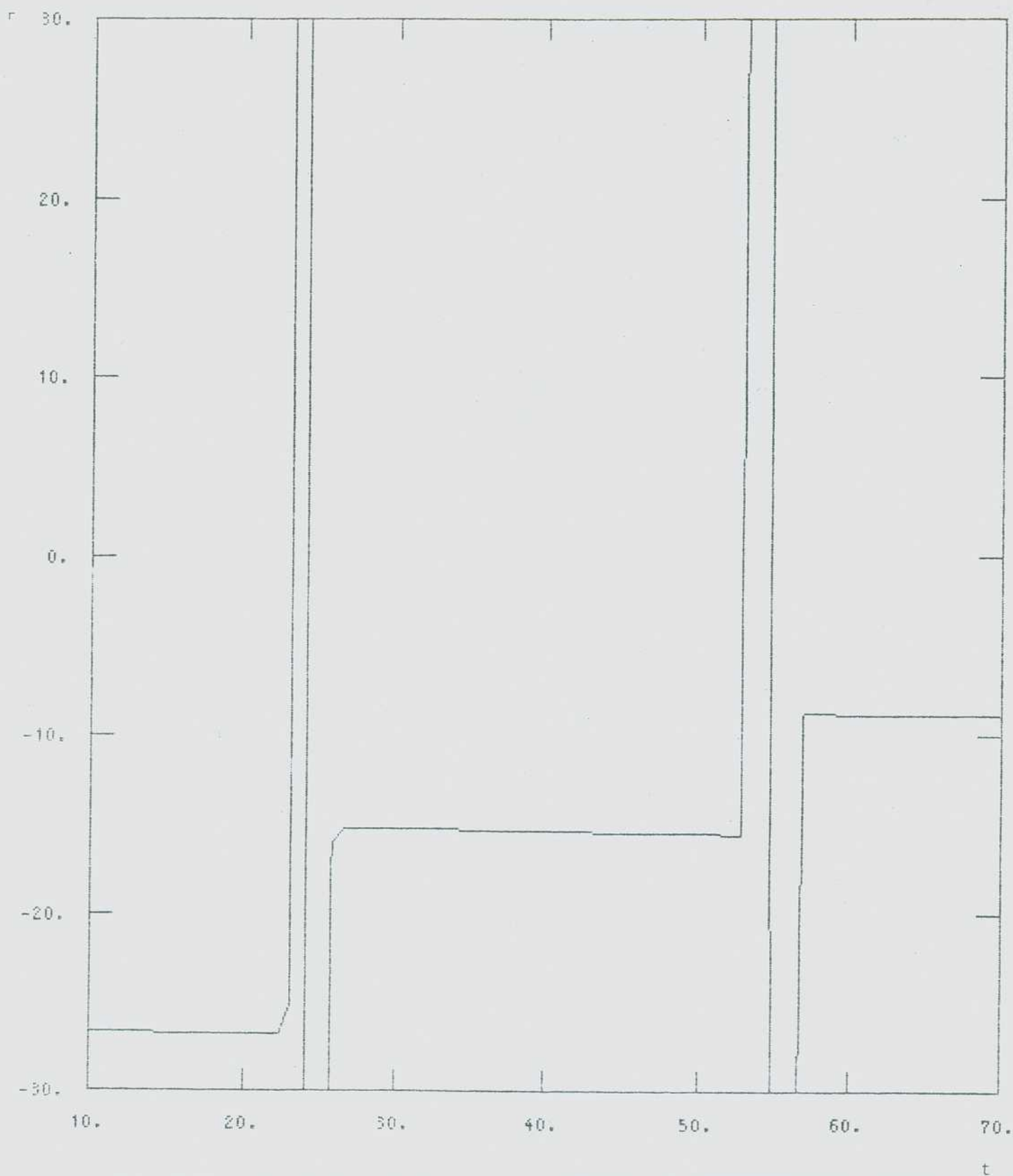


Fig.4: Solucion numerica de la Cosmologia de Jusuete. A la izquierda se muestra, en función del tiempo, la Fuerza externa aplicada sobre los espejos. A la derecha se muestra la función $x = q(t)$ obtenida.

Datos: $q_m = 10$, fuerza externa (3.50) ($a = 0.4$)

a) $M = 10$

b) $M = 1$



Fis.5: Fuerza ejercida por el campo sobre los espejos, correspondiente al caso (b) de la Fig.2.

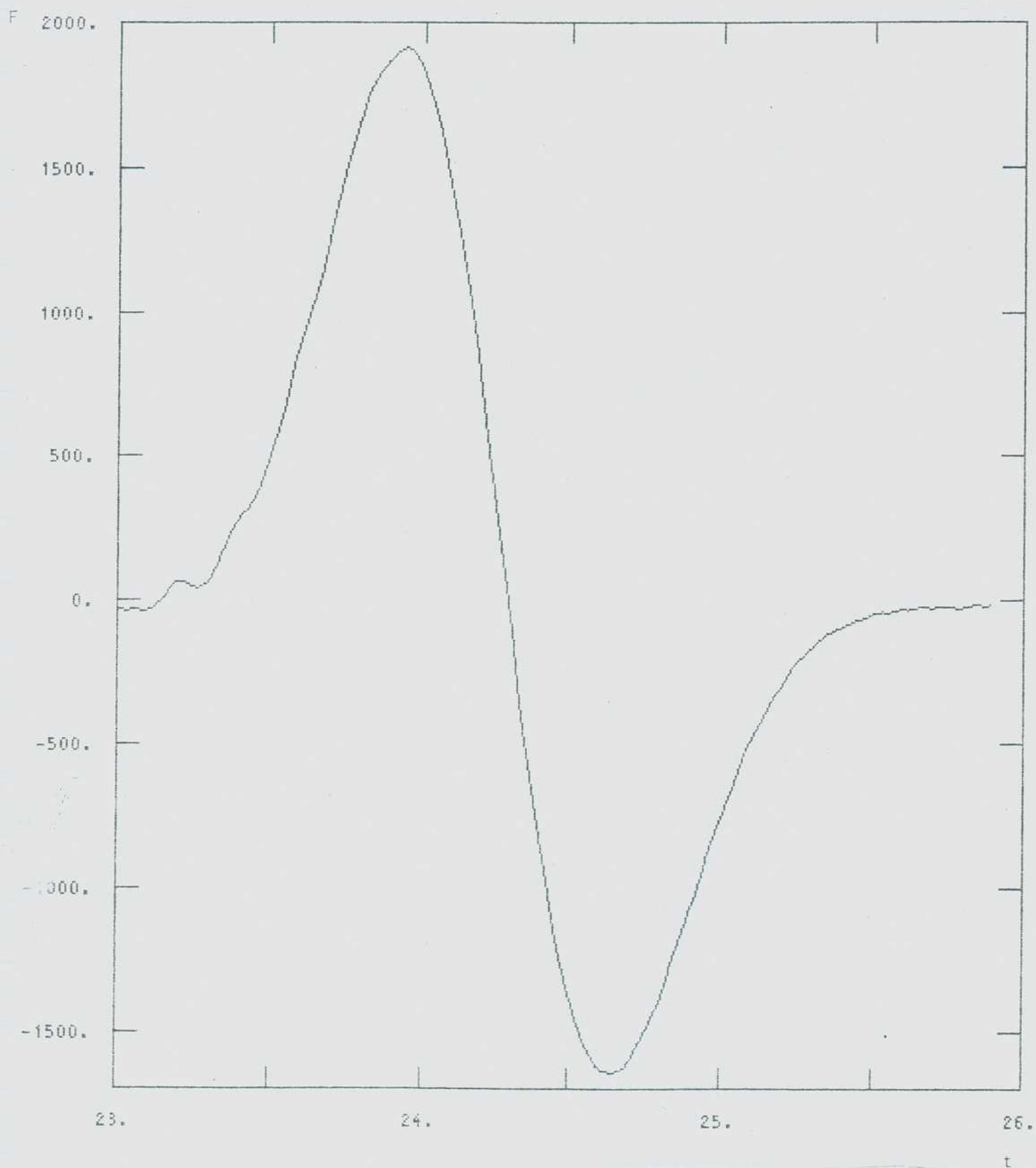


Fig.6: Ampliación del primer pulso de la Fig.5.

de t , y por lo tanto, de $q(t)$ (Pues la distancia entre espejos es proporcional a t , para los tiempos considerados en la Figura).

4. En los tramos estables dos fuerzas actúan suavemente: la fuerza atractiva, de origen topológico (Fuerza de Casimir), y la fuerza repulsiva debida a la presión de radiación. En cada pulso se crea más radiación, y la fuerza resultante en cada tramo estable es cada vez más cercana a cero. Como los intervalos de tiempo entre pulsos se incrementan, porque los espejos se separan cada vez más, se alcanza un estado final de equilibrio con fuerza resultante nula y velocidad constante. La Cosmología de Juguete evoluciona hacia un estado final de equilibrio, porque la fuerza atractiva de Casimir se equilibra con la fuerza repulsiva de la presión de radiación.

3.6 LA ENERGIA DE CASIMIR PARA ESPEJOS MOVILES

En la sección anterior hemos encontrado que el modelo que llamamos "Cosmología de Juguete", evoluciona hacia un estado final donde los espejos se mueven con velocidad constante. En la resolución del sistema de ecuaciones se utilizó el estado cuántico del ca

que es vacío, cuando los espejos están en reposo, para un sistema de observadores minkowskianos. Podríamos preguntarnos si ese mismo estado es vacío para algún conjunto de observadores en el estado final. La respuesta es: sí. Como vimos en la sección 3.2, existen sistemas de observadores para los cuales un estado que es vacío en algún instante, continúa siéndolo siempre. Esos sistemas de observadores son los que se construyen a partir de la función R mediante (3.13). Es decir que, si encontramos la función ${}^{\text{in}}R_M$ que resuelve la ecuación (3.8) y que satisface (3.39), entonces podremos construir un sistema de observadores que será minkowskiano mientras los espejos estén en reposo, y para el cual el estado $|0_M \text{ fin}\rangle$ será siempre vacío.

Sin embargo, este sistema de observadores puede llegar a ser muy complicado en la región final, debido a que la función ${}^{\text{in}}R_M$ puede ser complicada en esa región (en el Apéndice B se diseña un método gráfico para resolver (3.8)). Resulta, por lo tanto, de interés conocer cómo es percibido el estado $|0_M \text{ fin}\rangle$ en la región final, por otros sistemas de observadores.

Del mismo modo como hemos utilizado un fluido de referencia "bien comportado" en la región inicial (el fluido minkowskiano), consideremos ahora un sistema de observadores "bien comportado" en la región final. En este sentido, lo mejor que podemos hacer es considerar un fluido como el que se muestra en la Fig.7. Se trata de un fluido que es geodésico en la región final, pues las líneas de fluido son rectas (las velocidades de los observadores son constantes). Podemos decir que esto es lo más parecido a un fluido minkowskiano, que se pueda construir en la región final. Si la ecuación de movimiento del espejo es:

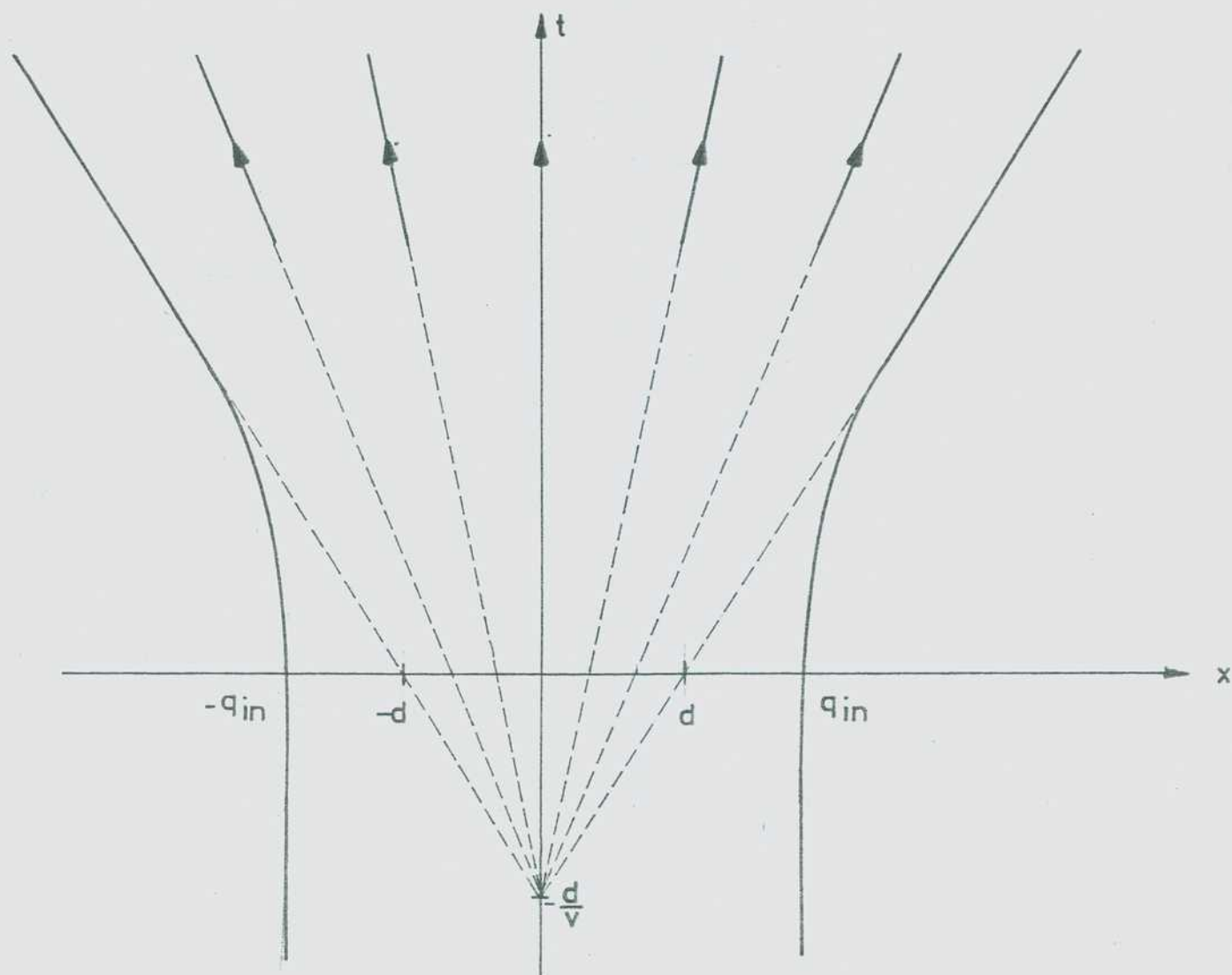


Fig.7: Flujo de observadores geodésicos, en el estado final de la Cosmología de Juguete.

$$(3.51) \quad q(t) = vt + d$$

vemos en la Fig.7 que las líneas de fluido convergen en el punto de coordenadas $t = -d/v$, $x=0$. Dado un punto (t,x) en la región final, la recta que pasa por este punto (t,x) y por el punto $(-d/v, 0)$, tiene pendiente $(t+d/v)/x$. Luego, el cociente entre las componentes v^t y v^x del campo vectorial \mathbf{v} que caracteriza el fluido, es:

$$(3.52) \quad \frac{v^t}{v^x} = \frac{t + \frac{d}{v}}{x}$$

Para conocer completamente el vector \mathbf{v} , deberíamos determinar cuál es el tiempo natural para este sistema de observadores. Las hipersuperficies $T = \text{cte.}$, ortogonales a las líneas de fluido son, en este caso, las hipérbolas:

$$(3.53) \quad \left(t + \frac{d}{v}\right)^2 - x^2 = f(T)$$

Elegir la función $f(T)$ corresponde a elegir la marcha del tiempo natural. Como ya hemos dicho, existen infinitas maneras de elegir el tiempo natural. Si T es tiempo natural, entonces $T' = T'(T)$ también lo es. Escogamos:

$$(3.54) \quad f(T) = A^2 \cdot e^{2cT}$$

Entonces, derivando en (3.53) y teniendo en cuenta que $v^t = \partial t / \partial T$ y $v^x = \partial x / \partial T$:

$$(3.55) \quad \left(t + \frac{d}{v}\right) v^t - x v^x = C \left[\left(t + \frac{d}{v}\right)^2 - x^2 \right]$$

Entonces de (3.52) y (3.55) resulta que:

$$(3.56) \quad v^t = C \left(t + \frac{d}{v}\right) \quad v^x = C x$$

Podemos preguntarnos si entre los fluidos de referencia que forman la familia (3.13) (es decir, aquéllos que se derivan de una función R), existirá uno que es geodésico en la región final. Para que esto ocurra, debería haber una función ${}^{out}R_{geo}$, solución de (3.8) para $q(t)=vt+d$, tal que reemplazada en (3.13), provea a v un comportamiento como el exisido por (3.56). Esa solución debería comportarse en la región final de la siguiente manera:

$$(3.57) \quad {}^{out}R_{geo}(z) = C^{-1} \ln \left[\frac{z + \frac{d}{v}}{E} \right]$$

Reemplacemos entonces (3.57) en (3.8), y veamos si puede resolver esa ecuación cuando $q(t)=vt+d$. Obtenemos que, para que esto ocurra, la constante C debe valer:

$$(3.58) \quad C = \frac{1}{2D} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right)$$

La ventaja de que exista un fluido de la familia (3.13), que es geodésico en la región final, es que nos facilita conocer cuál es el estado de vacío asociado a tales observadores. En efecto, el estado de vacío es aquél que proviene de cuantificar el campo

los modos (3.16), contruidos con la función (3.57),

Por otra parte, de acuerdo con (3.7) una carta (T, X) adaptada a este sistema de observadores es:

$$(3.59.a) \quad T = \frac{1}{2} [{}^{out}R_{geo}(t+x) + {}^{out}R_{geo}(t-x)]$$

$$(3.59.b) \quad X = \frac{1}{2} [{}^{out}R_{geo}(t+x) - {}^{out}R_{geo}(t-x)]$$

$$(3.60.a) \quad t = \frac{1}{2} [{}^{out}F_{geo}(T+X) + {}^{out}F_{geo}(T-X)]$$

$$(3.60.b) \quad x = \frac{1}{2} [{}^{out}F_{geo}(T+X) - {}^{out}F_{geo}(T-X)]$$

Nótese que el papel de la constante G es determinar el origen del tiempo natural T . Como F es la inversa de R :

$$(3.61) \quad {}^{out}F_{geo}(z) = G e^{cz} - \frac{d}{v}$$

Entonces el cambio de coordenadas es:

$$(3.62.a) \quad t = G e^{cT} \cosh cx - \frac{d}{v}$$

$$(3.62.b) \quad x = G e^{cT} \sinh cx$$

(por lo tanto, en (3.53-54) es $A=G$).

Calculemos el valor de expectación del tensor de energía-momento regularizado, en el estado $|0_{geo}; out\rangle$. Para ello debemos usar las ecuaciones (3.36-37), escritas con la función ${}^{out}R_{geo}$. El

resultado es:

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle_{\text{geo};\text{out}}^{\text{reg}} &= \langle T_{xx} \rangle_{\text{geo};\text{out}}^{\text{reg}} = \\ &= -\frac{1}{48\pi} \left[1 + \frac{\pi^2}{\ln^2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)} \right] \left\{ \frac{1}{(t-x+\frac{d}{\nu})^2} + \frac{1}{(t+x+\frac{d}{\nu})^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle T_{tx} \rangle_{\text{geo};\text{out}}^{\text{reg}} &= \langle T_{xt} \rangle_{\text{geo};\text{out}}^{\text{reg}} = \\ (3.63) \quad &= \frac{1}{48\pi} \left[1 + \frac{\pi^2}{\ln^2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)} \right] \left\{ \frac{1}{(t-x+\frac{d}{\nu})^2} - \frac{1}{(t+x+\frac{d}{\nu})^2} \right\} \end{aligned}$$

Si queremos hallar la energía percibida por los observadores geodésicos, en el estado $|0_{\text{geo};\text{out}}\rangle$, debemos tomar el valor de expectación del Hamiltoniano (2.52) en ese estado, es decir:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\Sigma} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{geo};\text{out}}^{\text{reg}} \nu^{\mu} d\Sigma^{\nu} = \int_{\Sigma} \langle T_{\tau\tau} \rangle_{\text{geo};\text{out}}^{\text{reg}} g_{\tau\tau}^{-1/2} d\Sigma \\ (3.64) \quad &= \int_{\Sigma} \langle T_{\tau\tau} \rangle_{\text{geo};\text{out}}^{\text{reg}} dx \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle 0_{\text{geo};\text{out}} | T_{\tau\tau} | 0_{\text{geo};\text{out}} \rangle &= \langle 0_{\text{geo};\text{out}} | \left[\frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial t}{\partial \tau} T_{tt} + \right. \\ (3.65) \quad &+ \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau} T_{tx} + \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial t}{\partial \tau} T_{xt} + \left. \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau} T_{xx} \right] | 0_{\text{geo};\text{out}} \rangle \end{aligned}$$

Entonces la energía de Casimir percibida por los observadores

geodésicos en la región final es:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-D}^D -\frac{1}{96\pi D^2} \left[\pi^2 + \ln^2 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \right] dx \\
 &= -\frac{1}{48\pi D} \left[\pi^2 + \ln^2 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.66}$$

Como el estado $|0_M \text{ fin}\rangle$ no posee energía en la región final (pues $\langle 0_M \text{ fin} | T^{\mu\nu} | 0_M \text{ fin}\rangle$ tiende a cero), los observadores geodésicos concluyen que $|0_M \text{ fin}\rangle$ no es vacío en esa región, sino que contiene partículas que cancelan exactamente a la contribución de origen topológico (3.66).

3.7 EL ORIGEN DE LOS ESPECTROS NO TÉRMICOS

Para finalizar el capítulo, en esta sección estudiaremos si es posible que el espectro de la radiación emitida por espejos en movimiento, sea no térmico. En el universo existen espectros de radiación no térmicos, siendo el correspondiente a los rayos cósmicos el ejemplo más importante. Los astrofísicos encuentran dificultades para explicar su origen [13,109,110]. Dada la similitud de un modelo cosmológico con un sistema de espejos móviles en presencia de un campo cuantificado, resulta entonces interesante averiguar bajo qué condiciones la radiación de

Partículas por espejos móviles puede tener un carácter no térmico.

En las secciones anteriores estudiamos un par de espejos que se movían bajo la acción de la fuerza ejercida sobre ellos por el campo. Esto nos obligó a resolver un sistema de dos ecuaciones acopladas: una para los espejos y otra para el campo. En esta sección las dificultades matemáticas serán menores porque fijaremos de antemano el movimiento de los espejos. Esto nos permitirá estudiar si hay relación entre distintos tipos de movimiento y distintos tipos de espectro.

Consideraremos que un espejo está en reposo y el otro tiene un movimiento "in-out" (es decir, con estados inicial y final estáticos):

$$(3.67) \quad x_1(t) = 0 \quad x_2(t) = q(t)$$

tal que:

$$(3.68) \quad \begin{aligned} q(t) &= q_{in} & \text{si } t \leq T_{in} \\ q(t) &= q_{out} & \text{si } t > T_{out} \end{aligned}$$

La existencia de regiones inicial y final estáticas, posibilita considerar en ellas sistemas de observadores minkowskianos, lo cual hace más transparente la noción de partícula (ver sección 2.2).

Los métodos desarrollados en la sección 3.2 nos permiten escribir

las soluciones de la ecuación de campo (3.4), que se anulan sobre ambos espejos, como:

$$(3.69) \quad u_m = (2i\sqrt{m\pi})^{-1} \left[e^{-i\frac{m\pi}{D}R(t-x)} - e^{-i\frac{m\pi}{D}R(t+x)} \right], m \in \mathbb{N}$$

donde $R(z)$ es solución de (3.8). Nuevamente, para cada solución R de la ecuación (3.8) es posible construir un sistema de observadores, mediante (3.15). Para ese sistema de observadores, el vacío es el que resulta de cuantificar el campo con los modos (3.69) contruidos con la misma R con que se construyó el fluido de referencia. En tal sistema de observadores no hay creación de partículas.

Ahora bien, si uno de esos sistemas de observadores es minkowskiano en la región inicial, puede no serlo en la región final. En efecto, en regiones donde $q(t)$ es constante, la solución más general de (3.8) es:

$$(3.70) \quad R(z) = \frac{D}{q} z + f(z) + C$$

donde $f(z)$ es una función periódica arbitraria de período $2q$. Nada garantiza que una solución ${}^{\text{in}}R_M$ que es lineal en la región inicial (y por lo tanto genera en la misma un fluido minkowskiano), no tenga un término periódico en la región final, que obligaría a que ese mismo fluido no sea minkowskiano en la región final. De manera que si $|0_M^{\text{in}}\rangle$ es el estado que es vacío en la región inicial para observadores minkowskianos, en sen

ocurrirá que observadores minkowskianos en la región final interpretarán al estado $|0_M; in\rangle$ como un estado que contiene partículas. El objetivo de esta sección es estudiar ese contenido de partículas.

De acuerdo con (2.19)

$$(3.71) \quad \langle 0_M; in | N_k^{M, out} | 0_M; in \rangle = \sum_j |\beta_{kj}|^2$$

donde β_{kj} es el coeficiente de la transformación de Bogolubov entre los modos usados para cuantificar el campo por los observadores que son minkowskianos en la región inicial por un lado, y los que lo son en la región final, por el otro lado:

$$(3.72) \quad \beta_{kj} = (\mu_j^{in} ; \mu_k^{out})$$

μ_j^{in} (μ_j^{out}) se construye con la solución $^{in}R_M$ ($^{out}R_M$) de (3.8) que es lineal en la región inicial (final). Como el producto interno de Klein-Gordon es independiente del tiempo, podemos calcular β_{kj} en $t > T_{out}$. En tal caso, luego de integrar por partes, se obtiene:

$$(3.73) \quad \beta_{kj} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{j}} \int_0^{2\pi} dx e^{-ikx} e^{-ij[x + \frac{\pi}{D} {}^{in}T_M(\frac{x q_{out}}{\pi}) + \frac{C}{D}]}$$

En esta expresión β_{jk}/\sqrt{k} aparece como un coeficiente de Fourier. Por lo tanto, por el lema de Riemann-Lebesgue, si

${}^{\text{in}}f_m$ no es una función C^∞ , el espectro (3.71) será no térmico.

Consideremos dos ejemplos:

1.- Espectro con comportamiento térmico a altas energías

Sea la función ${}^{\text{in}}R_m$ [60]:

$${}^{\text{in}}R_m(z) = \begin{cases} \frac{D}{q_{\text{in}}} z & z \leq 0 \\ \frac{D}{q_{\text{out}}} z + \frac{D}{\pi} \left(\frac{q_{\text{out}}}{q_{\text{in}}} - 1 \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{q_{\text{out}}} & z > 0 \end{cases}$$

(3.74)

El movimiento $q(t)$ correspondiente a esta ${}^{\text{in}}R_m$ puede obtenerse numéricamente a partir de (3.8). El resultado se muestra en la Fig. 8. En este caso la integral en (3.73) deviene en una representación de una función de Bessel (ver [111], pag. 14, ecuación (2)):

$$|\beta_{kj}|^2 = \frac{k}{j} |J_{k+j}(-j\lambda)|^2$$

(3.75)

donde:

$$\lambda = \frac{q_{\text{out}}}{q_{\text{in}}} - 1$$

(3.76)

Nótese que para que ${}^{\text{in}}R_m$ sea monótona creciente debe ser $|\lambda| < 1$. Un estudio detenido de la ecuación (3.8) permite

verificar que $|\lambda|$ es la máxima rapidez que alcanza el espejo móvil [60].

El espectro (3.71) se puede sumar numéricamente utilizando el siguiente desarrollo (ver [112], pag.360, (9.1.14)):

$$[J_m(z)]^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j [z(m+j)!] (z/2)^{2j}}{[(m+j)!]^2 (2m+j)! j!} \quad (3.77)$$

El resultado del cómputo se presenta en la Fig.9 a través de un gráfico semilogarítmico. Puede verse que el espectro es térmico a altas energías.

2.- Espectro con comportamiento no térmico

Si la parte periódica de ${}^{in}R_m$ es elegida como:

$${}^{in}f_m(z) = \begin{cases} -\frac{a}{q_{out}} z (q_{out} + z) & -q_{out} \leq z \leq 0 \\ -\frac{a}{q_{out}} z (q_{out} - z) & 0 \leq z \leq q_{out} \end{cases} \quad (3.78)$$

periódicamente extendida y donde $|a| < 1$ para que ${}^{in}R_m$ sea monótona creciente, se obtiene:

$$\beta_{mk} = \sqrt{\frac{k}{2\pi|a|}} \left\{ (-1)^{m+k+1} g\left(\frac{m+k+a}{\sqrt{2|a|}}\right) + g\left(\frac{m+k-a}{\sqrt{2|a|}}\right) \right\} \quad (3.79)$$

donde:

$$g(z) \equiv \left[\frac{1}{2} - C(z) \right] \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) + \left[\frac{1}{2} - S(z) \right] \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) \quad (3.80)$$

donde $C(z)$, $S(z)$ son integrales de Fresnel (ver [112], pag.300, (7.3.6)). La función g posee un desarrollo para argumentos grandes, que permite un cómputo numérico del espectro (3.71) (ver [112], pag.302, (7.3.28)):

$$g(z) = \frac{1}{\pi z} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1.3 \dots (4m+1)}{(\pi z^2)^{2m+1}} \quad (3.81)$$

En la Fig.10 se ve un gráfico logarítmico del espectro para $a=0.01$. Cuando k es grande obtenemos el siguiente comportamiento:

$$\langle 0_M; in | N_k^{M; out} | 0_M; in \rangle \propto \frac{a^2}{k^4} \quad (3.82)$$

es decir, un espectro no térmico.

Una cuestión interesante es que el espectro (3.71) sólo depende

del comportamiento final de ${}^{\text{in}}R_M$ (ver (3.72)). Para entender por qué ocurre esto utilizaremos el método gráfico diseñado en el Apéndice B, que permite comparar en una misma figura las funciones $R(z)$ y $q(t)$. En la Fig.11 hemos representado un movimiento "in-out" y la función ${}^{\text{in}}R_M$ asociada. ${}^{\text{in}}R_M$ es lineal al comienzo, tiene una región intermedia cuya forma no nos interesa demasiado, y finalmente es una función periódica montada sobre una recta. Teniendo en cuenta el método gráfico del Apéndice B, para estudiar la relación entre $R(z)$ y $q(t)$, podemos decir que para que $q(t)$ tenga una singularidad en t , es necesario que $R(z)$ tenga una singularidad en $z=t-q(t)$ o en $z=t+q(t)$. Sin embargo no es suficiente, porque si $R(z)$ tuviera singularidades en $z=t-q(t)$ y en $z=t+q(t)$, éstas podrían ser tales que el efecto de ambas se cancelara, quedando $q(t)$ libre de singularidades. Esto lo veremos mejor con el ejemplo de la Fig.11. Nuestro objetivo es entender por qué el espectro depende sólo del comportamiento final de ${}^{\text{in}}R_M$ (más precisamente, de la parte periódica). Supongamos que en el tramo intermedio de la función ${}^{\text{in}}R_M$ hay una singularidad (círculo negro); ésta dará origen a dos singularidades en $q(t)$, las cuales están conectadas por un rayo de luz que rebota en el espejo fijo en $x=0$. Por el contrario, cada singularidad de ${}^{\text{in}}f_M$ (cuadrado negro) genera sólo una singularidad en $q(t)$, porque debido a la periodicidad, se aniquilan las restantes (cuadrado blanco). La interpretación física de este resultado es que las singularidades del tramo intermedio de ${}^{\text{in}}R_M$ no modifican el comportamiento del espectro, porque generan dos singularidades "compañeras" en $q(t)$, conectadas por un rayo de luz. Esto susiere que no queda vestigio

3.7 EL ORIGEN DE LOS ESPECTROS NO TERMICOS

del tramo intermedio porque los cuantos creados en una singularidad son absorbidos en su compañera. . Esto es lo que sucede con el movimiento de la Fig.8, que posee dos discontinuidades compañeras en su aceleración (en $t=T_{in}$ y $t=T_{out}$).

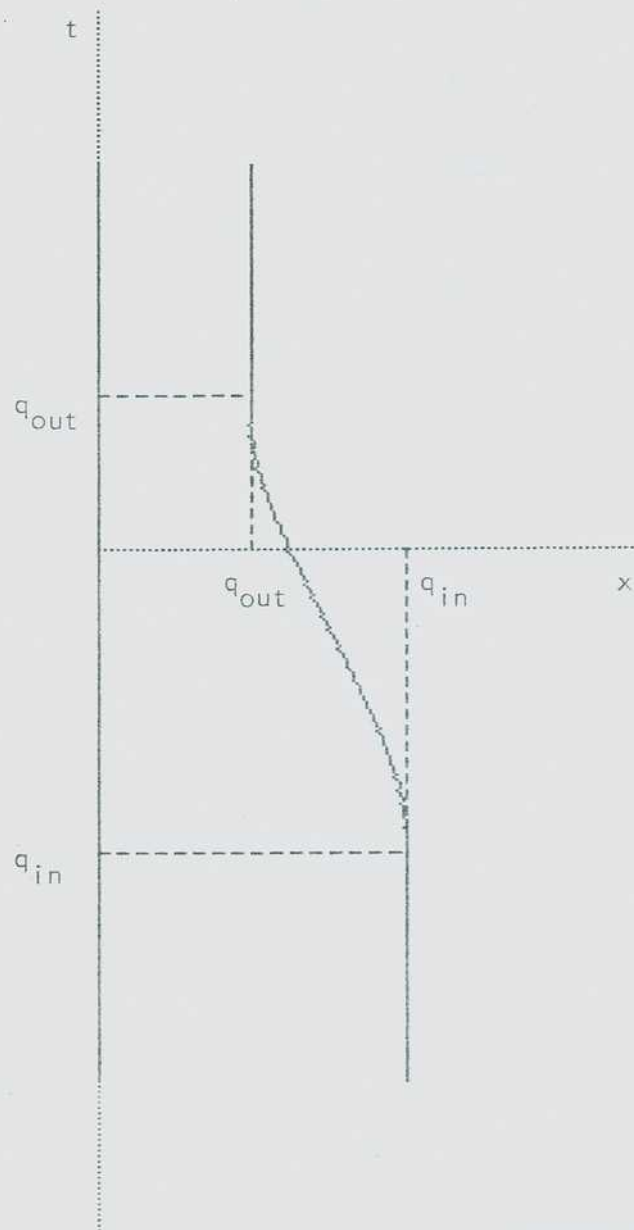
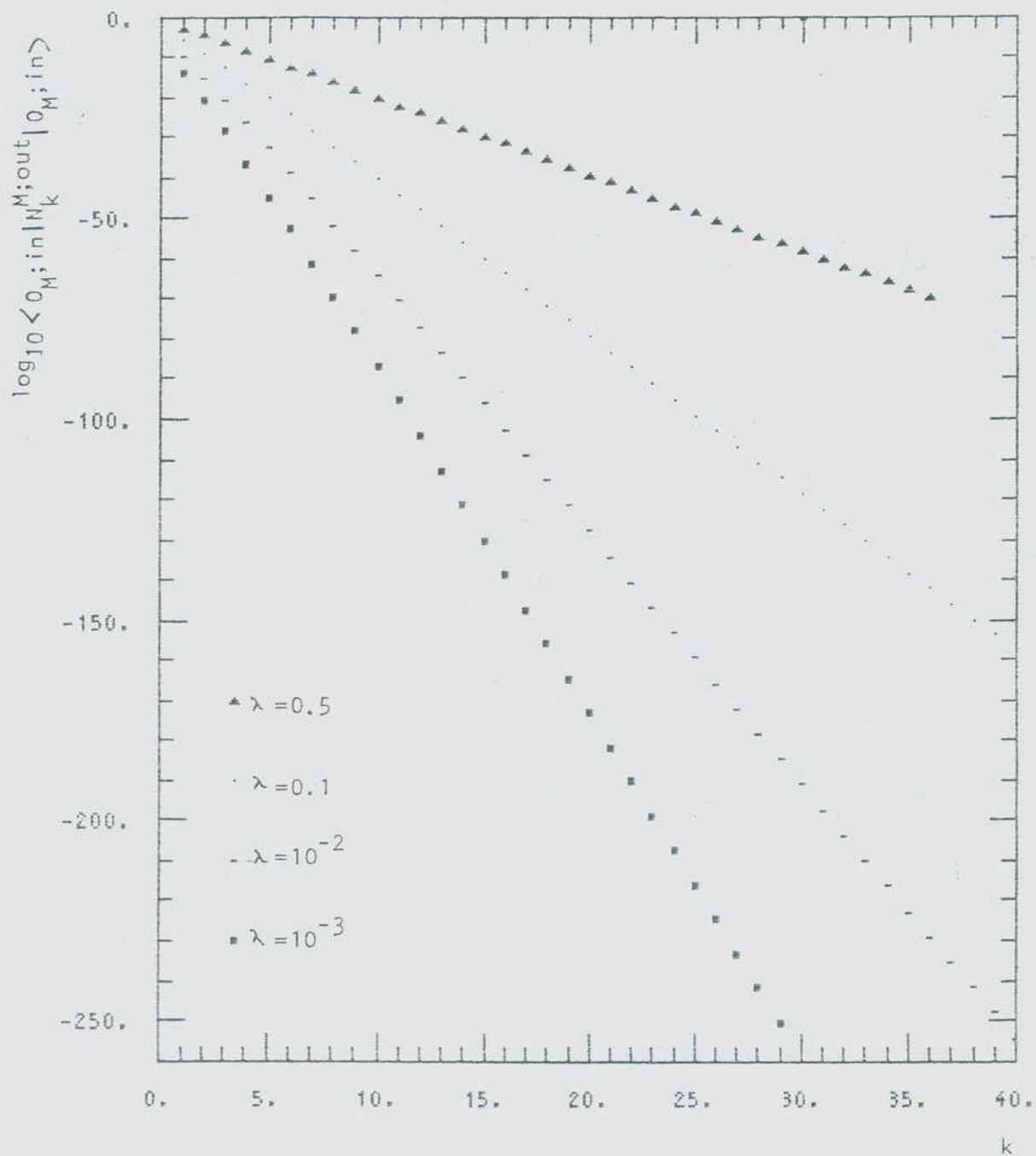


Fig.8: Gráfico de la función $x = q(t)$ que resuelve la ecuación (3.8), cuando R es la función dada en (3.74).



Fis.9: Espectro de las partículas creadas por el movimiento de la Fis.8.

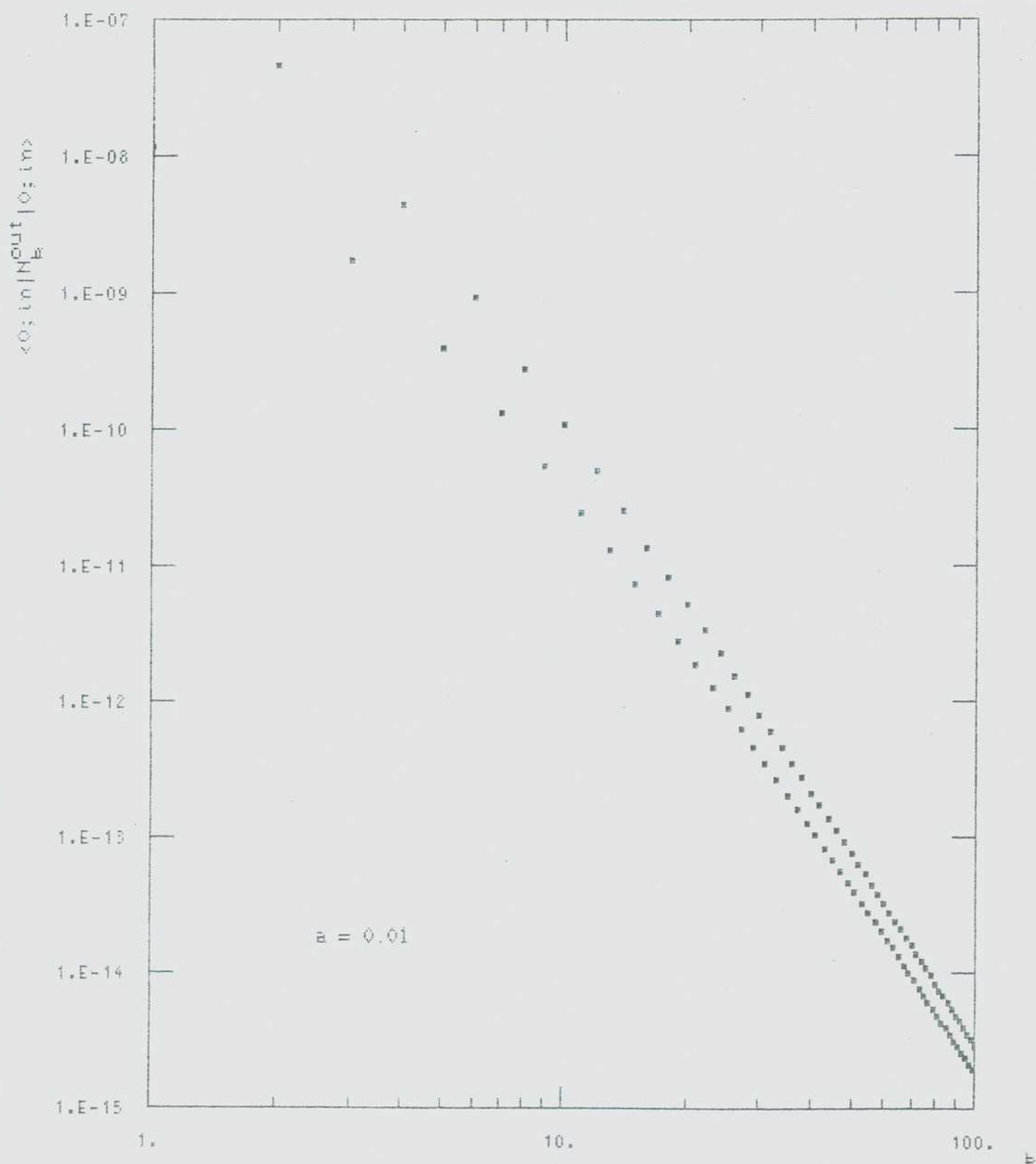


Fig.10: Espectro de las partículas creadas correspondiente al caso (3.78).

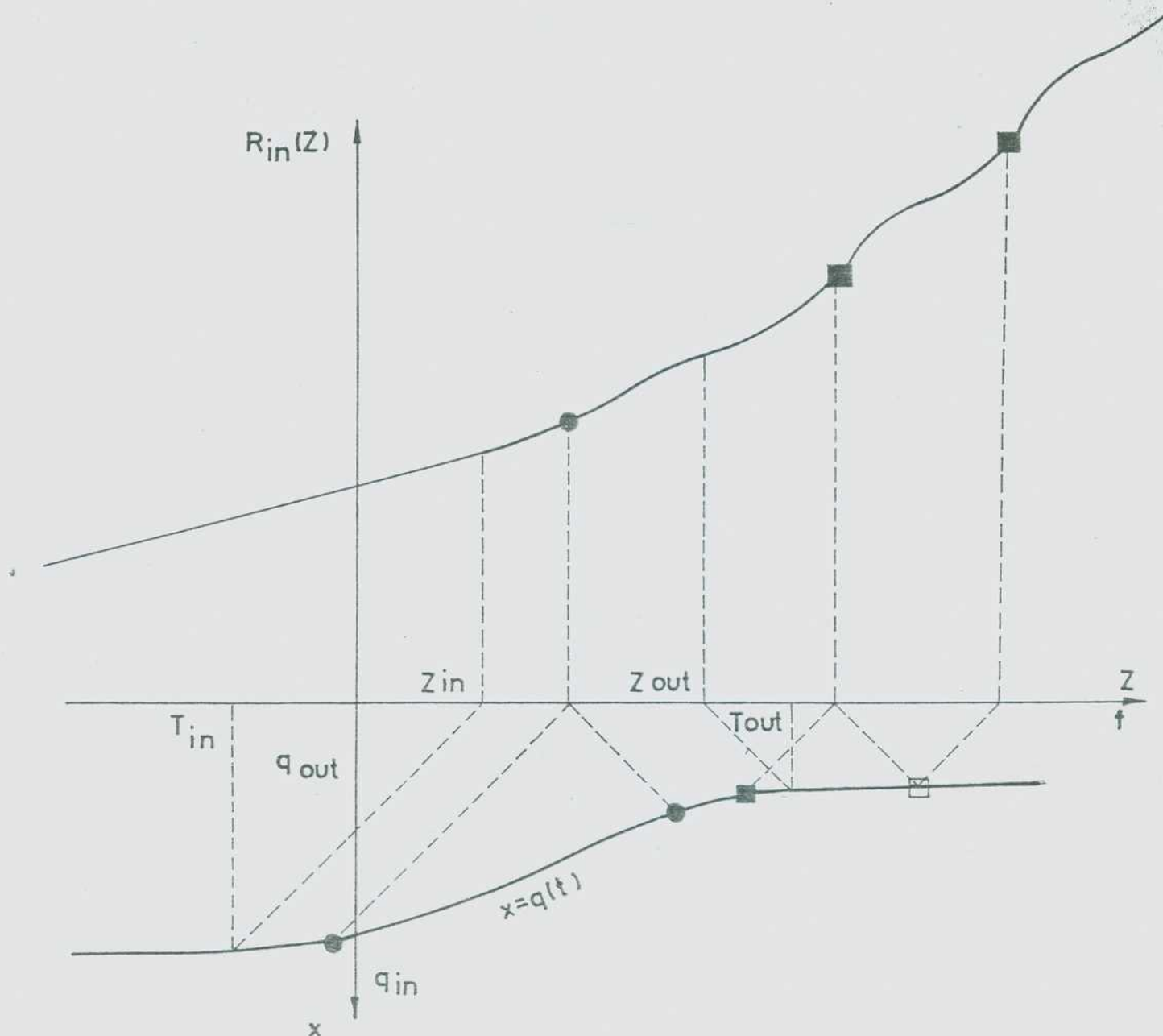


Fig.11: Una singularidad \bullet en el tramo intermedio de ${}^{\text{in}}R_M(z)$, $z \in [z_{\text{in}}, z_{\text{out}})$, genera dos singularidades compañeras en $q(t)$, unidas por un rayo de luz que rebota en el espejo fijo en $x=0$. Una singularidad \blacksquare en ${}^{\text{in}}f_M(z)$, $z > z_{\text{out}}$, genera sólo una singularidad en $q(t)$, pues las restantes se aniquilan en virtud de la periodicidad de ${}^{\text{in}}f_M$.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES

La formulación de una Teoría Cuántica de Campos en un espacio-tiempo curvo tropieza con dos dificultades: 1) la cuantificación del campo es ambigua; no resulta claro cuál es el estado cuántico que debe caracterizarse como "estado de vacío", a partir del cual se generan los restantes estados. 2) aparecen divergencias ultravioletas que deben ser eliminadas.

En el capítulo 2 de esta Tesis atacamos la primera de las dificultades, tomando la idea con que Unruh resolvió la paradoja de los dos vacíos del espacio-tiempo plano: el de Minkowski y el de Rindler. Unruh propuso que la noción de vacío depende de los observadores. A cada sistema de observadores hay asociado un estado cuántico del campo en el cual los observadores no detectan cuantos. Pero ese estado de vacío es distinto para diferentes sistemas de observadores.

Los resultados originales expuestos en el capítulo 2 de esta Tesis son los siguientes:

1. Para aplicar la idea de Unruh en una geometría cualquiera, debimos profundizar el concepto de sistema de referencia. Concluimos que el papel del sistema de referencia en Relatividad General consiste en determinar qué es espacio y qué es tiempo. Espacio es cada hipersuperficie ortogonal a las líneas del fluido de referencia. El tiempo es una magnitud constante sobre cada una de estas hipersuperficies (etiqueta a las hipersuperficies). La distinción entre espacio y tiempo no es vana, pues los aparatos de medición son sensibles a esa distinción, y ésta es la razón por la cual distintos observadores obtienen mediciones diferentes en el mismo evento del espacio-tiempo (de ahí la dependencia entre la noción de vacío y el sistema de observadores).
2. Para caracterizar cuál es el estado de vacío que corresponde a cada sistema de observadores en una geometría dada arbitraria, definimos un operador Hamiltoniano invariante frente a cambios de carta, pero dependiente del sistema de observadores. La definición se sustenta en exigir que este operador sea conjugado del tiempo natural del sistema de observadores.

3. Para definir el estado de vacío asociado a cada sistema de observadores se esgrimieron dos posibles criterios, referidos al comportamiento del Hamiltoniano frente a ese estado: diagonalización del Hamiltoniano (generalización de la propiedad análoga en el espacio-tiempo plano), y minimización de la energía. Se encontró que los dos criterios son equivalentes y se obtuvieron los datos de Cauchy de la base de soluciones con la que cuantifica el campo cada sistema de observadores.

4. Se hizo un estudio general de la invariancia conforme del Hamiltoniano definido. Hasta el presente los resultados sobre invariancia conforme del Hamiltoniano se hacían para geometrias particulares [91]. A nuestro entender, esto sucedía porque no se contaba con una correcta definición del Hamiltoniano. Por ejemplo, si hubiéramos definido [113]:

$$H_{\Sigma} = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} u^{\mu} d\Sigma^{\nu}$$

entonces en una carta adaptada sería:

$$H_{\Sigma} = \int_{\Sigma} T_{00} g_{00}^{-1} d\Sigma$$

Es decir que aparecería un factor g_{00}^{-1} en lugar del $g_{00}^{-1/2}$ correcto. El factor g_{00}^{-1} imposibilitaría la demostración de la invariancia conforme.

5. Mostramos que nuestra Prescripción general para definir el vacío, contiene a la mayor parte de los vacíos utilizados, con diferentes argumentos, en la literatura.

A los efectos de facilitar los cálculos, en el punto 3 nos restringimos a casos donde era posible separar el tiempo natural en la ecuación de campo. Sin embargo no creemos que la diagonalización y minimización del Hamiltoniano funcione sólo en estos casos. Por ejemplo, hay casos conformes donde las variables no se separan pero la diagonalización y minimización funciona.

Creemos que estos resultados contribuirán a dar una base más sólida al tema de la elección del estado de vacío en el espacio-tiempo curvo y aún en el plano.

En el capítulo 3 hemos desarrollado un símil cosmológico elemental ("Cosmología de Juguete"), utilizando los resultados del capítulo anterior. El símil se basa en la analogía existente entre un sistema de espejos móviles en presencia de un campo cuantificado, y una cosmología semiclásica: en ambos casos se crean cuantos de campo que reaccionan sobre la causa que los origina (movimiento de los espejos en un caso, y evolución de la geometría en el otro). Los resultados originales presentados son los siguientes:

1. Para estudiar la evolución de los espejos para neces. lo

conocer la fuerza que un campo ejerce sobre una superficie móvil. Se la determinó utilizando argumentos de invariancia.

2. Se diseñó un programa de cálculo para resolver el sistema de ecuaciones acopladas.
3. Se obtuvo que el sistema evoluciona hacia un estado final donde los espejos se mueven con velocidad constante, siempre que el sistema cuente con una cantidad de energía suficiente.
4. Se calculó la energía de Casimir (dependiente de la velocidad) para un sistema de observadores geodésicos en el estado final (ecuación (3.66)).
5. Se estudio la naturaleza de los espectros no térmicos en sistemas de espejos móviles, determinándose que se originan en discontinuidades del movimiento. Esto constituye una pista para estudiar el origen cosmológico de espectros no térmicos en el universo. Además se propusieron un ejemplo con espectro térmico y otro con espectro no térmico.

6. El diseño de un método gráfico para estudiar la ecuación (3.8), que gobierna el sistema, permitió extraer conclusiones sobre las condiciones bajo las cuales la contribución de una discontinuidad es absorbida por otra discontinuidad.

El tema de espejos móviles en presencia de un campo cuantificado ha merecido la atención de muchos autores en la última década. Más allá del interés que éste concita por sí mismo, hemos querido en esta Tesis poner énfasis sobre la importancia que el mismo puede tener para los cosmólogos, vistas las analogías señaladas, y teniendo en cuenta que, en este caso, las ecuaciones tienen una más fácil resolución.

APENDICE A

MAGNITUDES QUE CARACTERIZAN UN FLUIDO

Enumeraremos las magnitudes tensoriales que caracterizan el comportamiento de un fluido [87]. Sea u el vector unitario tangente a las líneas de fluido. Definimos:

Vector de curvatura:

$$C_{\mu} \equiv u^{\nu} \nabla_{\nu} u_{\mu}$$

Tensor de Killins:

$$K_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu} u_{\nu} + \nabla_{\nu} u_{\mu}$$

Tensor de vortice:

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu} u_{\nu} - \nabla_{\nu} u_{\mu} = \partial_{\mu} u_{\nu} - \partial_{\nu} u_{\mu}$$

Además definimos:

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv u_{\mu} u_{\nu} - g_{\mu\nu}$$

Luego $u_{\mu} u^{\nu} \equiv -\gamma_{\mu}^{\nu}$ son proyectores. Llamemos:

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu}^{\lambda} \gamma_{\nu}^{\rho} A_{\lambda\rho}$$

Es fácil ver que:

$$K_{\mu\nu} = \tilde{K}_{\mu\nu} + u_{\mu} C_{\nu} + u_{\nu} C_{\mu}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \tilde{\Omega}_{\mu\nu} + u_{\mu} C_{\nu} - u_{\nu} C_{\mu}$$

Cuando $C_{\mu} = 0$ el fluido es geodésico.

Cuando $\tilde{\Omega}_{\mu\nu} = 0$ el fluido se dice "irrotacional". Puede probarse que $\tilde{\Omega}_{\mu\nu} = 0$ es condición necesaria y suficiente para la existencia de hipersuperficies globales ortogonales a las líneas de fluido [87].

Cuando $\Omega_{\mu\nu} = 0$ el fluido es geodésico e irrotacional.

Cuando $\tilde{K}_{\mu\nu} = 0$ el fluido se dice "rígido" (según Born [114]).

Cuando $K_{\mu\nu} = 0$ el fluido es geodésico y rígido. Además u es un vector de Killing.

Cuando $\tilde{\Omega}_{\mu\nu} = 0$, la existencia de hipersuperficies ortogonales a las líneas de fluido nos permite definir una carta adaptada donde $x^i = \text{cte.}$ ($i=1,2,3,\dots,n-1$) sobre cada línea de fluido y $g_{0i} = 0$.

En esta carta es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}$$

$$u^{\mu} = (g_{00}^{-1/2}, 0, 0, 0, \dots)$$

$$u_{\mu} = (g_{00}^{1/2}, 0, 0, 0, \dots)$$

$$C_{\mu} = (0, \frac{1}{2} (\ln g_{00})_{,i})$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{00}^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & -g_{00,i} \\ g_{00,i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{\mu\nu} = - g_{00}^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & g_{00,i} \\ g_{00,i} & \gamma_{ij,0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, cuando $\hat{K}_{\mu\nu} = 0$ la distancia entre los puntos materiales del fluido es constante en el tiempo.

el z_2 relacionado con z_1 (ver Fig.12). La ecuación (B.1) dice que la diferencia entre los valores que la función R toma sobre cualquier par de puntos relacionados, es de dos unidades.

Si z_1 y z_2 están relacionados, y z_1 y z_3 también lo están, diremos que z_1 y z_3 tienen una relación de segundo orden (hay dos rebotes sobre $q(t)$ (ver Fig.12)). Como $|\dot{q}(t)| < 1$ todos los puntos del intervalo $[z_1, z_2]$ están relacionados con puntos que están fuera de este intervalo. Por lo tanto, para seleccionar una única solución $R(z)$, debemos prescribir la función R en un intervalo de la forma $[z_1, z_2]$ (donde z_1 y z_2 son puntos relacionados), y luego propagarla fuera del intervalo sumando dos unidades (de acuerdo a (B.1)) por cada orden de relación (este hecho ya fue señalado en [54]). Esto puede hacerse sencillamente como se muestra en la Fig.12, donde en el semieje vertical inferior se mide $q(t)$ y en el semieje vertical superior se mide $R(z)$. Sin embargo no hay total libertad para prescribir $R(z)$ en $[z_1, z_2]$. En efecto, si se desea que $R(z)$ resulte continua, no basta con que la prescripción sea continua en (z_1, z_2) porque pueden aparecer discontinuidades en z_1 y z_2 , y demás puntos relacionados con ellos. Si pedimos que

$$\lim_{z \rightarrow z_2^-} R(z) = \lim_{z \rightarrow z_1^+} R(z)$$

concluimos que la prescripción en z_2 debe ser igual a la prescripción en z_1 más dos unidades.

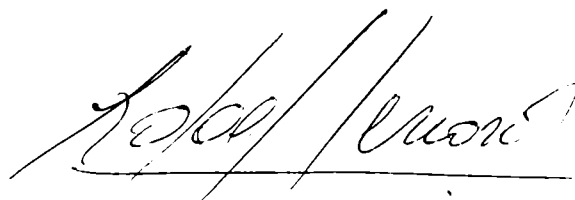
Similares cuidados deben tomarse si se desea que la derivada sea continua. Además deseamos que la función $R(z)$ sea monótona que posea inversa. Si derivamos (B.1) respecto de t :

$$(B.2) \quad R'[t+q(t)] [1+\dot{q}(t)] = R'[t-q(t)] [1-\dot{q}(t)]$$

Como $|\dot{q}(t)| < 1$, la ecuación (B.2) dice que $\text{signo } R'[t+q(t)] = \text{signo } R'[t-q(t)]$. Es decir que el signo de la derivada de R evaluado en dos puntos relacionados es el mismo. Por lo tanto, para que la función sea monótona es suficiente que la prescripción sea monótona.

De acuerdo con estas consideraciones, para una dada $q(t)$ existen infinitas soluciones $R(z)$ de la ecuación (B.1) (tantas como posibles prescripciones en un intervalo de extremos relacionados).

2.- Cuando $R(z)$ es dada, podemos invertir el método para hallar $q(t)$. En este caso la construcción gráfica permite ver que, cuando $R(z)$ es monótona creciente, la solución existe y es única. Además, por (B.2) se satisface que $|\dot{q}(t)| < 1$.

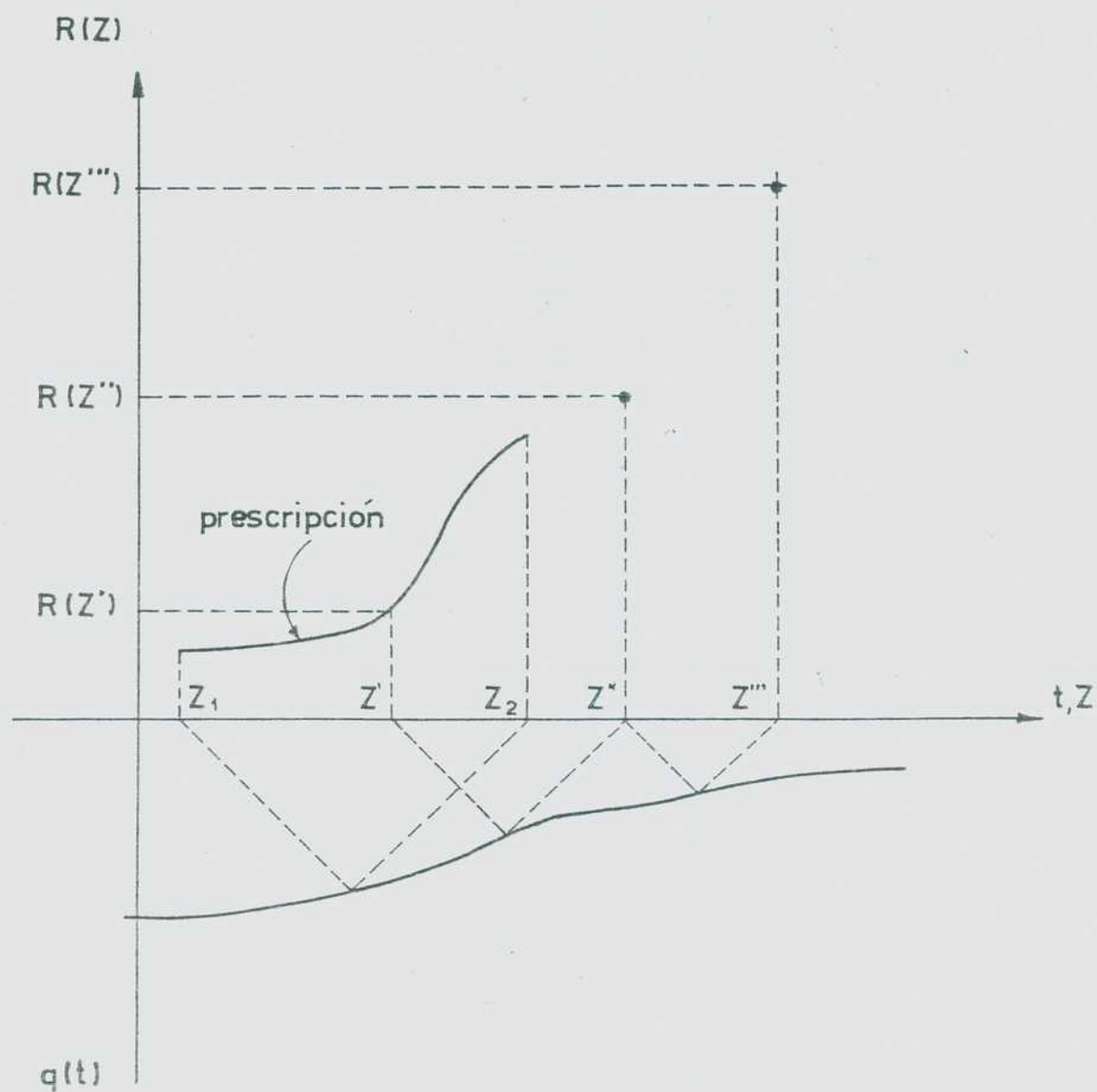


Fig.12f La función $R(z)$ es prescrita en un intervalo $[z_1, z_2]$ (z_1 y z_2 son puntos relacionados). Para conocer el valor $R(z'')$ en un punto z'' exterior a $[z_1, z_2]$, debemos establecer el orden de relación entre z'' y un punto $z' \in [z_1, z_2]$. Luego $R(z'')$ resulta de sumar (o restar) dos unidades a $R(z')$ por cada orden de relación (según si z'' esté a la derecha o a la izquierda del intervalo de prescripción).

REFERENCIAS

1. Einstein, A., Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1915), 844.
2. Einstein, A., Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1917), 142.
3. de Sitter, W., Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 19 (1917), 1217.
4. de Sitter, W., Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 19 (1917), 229.
5. Weyl, H., Phys. Z. 24 (1923), 230.
6. Friedmann, A., Z. Phys. 10 (1922), 377.
7. Lemaître, G., Ann. Soc. Sci. Brux. A 47 (1927), 49.
8. Hubble, E. P., Proc. Nat. Acad. Sci. 15 (1927), 168.
9. Robertson, H. P., Astrophys. J. 82 (1935), 248.
10. Robertson, H. P., Astrophys. J. 83 (1936), 187.
11. Robertson, H. P., Astrophys. J. 83 (1936), 257.
12. Walker, A. G., Proc. Lond. Math. Soc. 42 (1936), 90.
13. Sciama, D. W., "Modern Cosmology", Cambridge University Press, Cambridge, 1971.
14. Peebles, P. J. E., "Physical Cosmology", Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1971.
15. Zeldovich, Ya. B. y Novikov, I. D., "Relativistic Astrophysics, Vol. II: The Universe and Relativity", University of Chicago Press, Chicago, 1974.
16. Weinberg, S., "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", John

Wiley and Sons (N.Y.), 1972.

17. Penzias, A.A. y Wilson, R.K., *Ap.J.* 142 (1965), 419.
18. Gamow, G., *Phys.Rev.* 70 (1946), 572.
19. Wasoner, R.V., Fowler, W.A. y Hoyle, F., *Ap.J.* 148 (1967), 3.
20. Roessaard, A.M. y Steigman, G., *Ann.Rev.Astron.Astrophys.* 23 (1985), 319.
21. Brandenberger, R.H., *Rev.Mod.Phys.* 57 (1985), 1.
22. Guth, A.H. y Tye, S.H., *Phys.Rev.Lett.* 44 (1980), 631.
23. Guth, A.H., *Phys.Rev.D* 23 (1981), 347.
24. Albrecht, A. y Steinhardt, P.J., *Phys.Rev.Lett.* 48 (1982), 1220.
25. Linde, A.D., *Phys.Lett.B* 108 (1982), 389.
26. Nachtmann, O., *Commun.Math.Phys.* 6 (1967), 1.
27. Cernikov, N.A. y Tsirova, E.A., *Ann.Inst. Henri Poincaré IX* (1968), 106.
28. Castagnino, M., *C.R.Acad.Sci.Paris* 268 (1969), 1157.
29. Parker, L., *Phys.Rev.* 183 (1969), 1057.
30. Castagnino, M., *Gen.Rel.Grav.* 9 (1978), 101.
31. De Witt, B.S., *Phys.Rep.* C-19 (1975), 295.
32. Birrell, N.D. y Davies, P.C.W., "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
33. Isham, C.J., *Annals of N.Y. Acad.Sci.* 302 (1977), 114.
34. Nanopoulos, D.V., "Phenomenological Aspects of Unified Theories", presentado en la XXII International Conference on High Energy Physics, Leipzig, Julio de 1984, preprint CERN-TH 3995/84.
35. Anderson, P., *Phys.Rev.D* 28 (1983), 271.
36. Anderson, P., *Phys.Rev.D* 29 (1984), 615.
37. Casimir, H.B.G., *Proc.kon.Akad.Wetenschap B* 51 (1948), 793.
38. London, F., *Zeits.f.Physik*, 63 (1930), 245.
39. London, F., *Z.Physik.Chemie B* 11 (1931), 222.

40. Lifshitz, E.M., Sov.Phys. JETP 2 (1956), 73.
41. Landau, L. & Lifshitz, E.M., "Electrodynamics of Continuous Media", Pergamon Press, 1963.
42. Deryagin, B. & Abrikosova, I.I., Disc.Faraday.Soc. 18 (1954), 33.
43. Deryagin, B., Abrikosova, I.I. & Lifshitz, E.M., Quart.Rev. 10 (1956), 295.
44. Kitchenier, J.A. & Prosser, A.P., Proc.Roy.Soc. A 242 (1957), 403.
45. Sparnaz, M.J., Physica 24 (1958), 751.
46. Black, W., de Jongh, J.G.V., Overbeek, J.T.G. & Sparnaz, M.J., Trans.Faraday Soc. 56 (1960), 1597.
47. Tabor, R. & Winterton, R.H.S., Nature 219 (1968), 1120.
48. Fierz, M., Helv.Phys.Acta 33 (1960), 855.
49. Brown, L.S. & MacLae, G.J., Phys.Rev. 184 (1969), 1272.
50. Boyer, T.H., Ann.Phys.(N.Y.) 56 (1970), 474.
51. Ford, L.H., Phys.Rev. D 11 (1975), 3370.
52. Dowker, J.S. & Critchley, R., J.Phys.A 9 (1976), 535.
53. Itzykson, C. & Zuber, J.R., "Quantum Field Theory", Mc Graw-Hill, 1980.
54. Fulling, S.A. & Davies, P.C.W., Proc.R.Soc.London A 348 (1976), 393.
55. Davies, P.C.W. & Fulling, S.A., Proc.R.Soc.London A 356 (1977), 237.
56. Walker, W.R. & Davies, P.C.W., J.Phys. A 15 (1982), L477.
57. Walker, W.R., Class.Quantum Grav. 2 (1985), L37.
58. Walker, W.R., Phys.Rev.D 31 (1985), 767.
59. Moore, G.T., J.Math.Phys. 11(1970), 2679.
60. Castagnino, M. & Ferraro, R., Ann.Phys.(N.Y.) 154 (1984), 1.
61. Ravava, M. & Tennins, J., Phys.Rev.D 31 (1985), 307.
62. Frolov, V.F. & Serebriani, E.M., J.Phys. A 12 (1979), 2415.
63. Frolov, V.F. & Serebriani, E.M., J.Phys. A 13 (1980),

3205.

64. Candelas, P. y Raine, D.J., J.Math.Phys. (N.Y.) 17 (1976), 2101.
65. Candelas, P. y Deutsch, D., Proc.R.Soc.London A 354 (1977), 79.
66. Ford, L.H. y Vilenkin, A., Phys.Rev.D 25 (1982), 2569.
67. Unruh, W.G., Phys.Rev.D 14 (1976), 870.
68. Imamura, T., Phys.Rev. 118 (1960), 1430.
69. Grib, A.A. y Mamaev, S.G., Sov.J.Nucl.Phys. 10 (1970), 722.
70. Grib, A.A. y Mamaev, S.G., Sov.J.Nucl.Phys. 14 (1972), 450.
71. Berger, B., Phys.Rev.D 12 (1975), 368.
72. Castasino, M. Verbeure, A. y Weder, R.A., Phys.Lett.A 8 (1974), 99.
73. Castasino, M. Verbeure, A. y Weder, R.A., Nuovo Cimento B 26 (1975), 396.
74. Grib, A.A., Mamaev, S.G. y Mostepanenko, V.M., Gen.Rel.Grav. 7 (1976), 535.
75. Grib, A.A., Mamaev, S.G. y Mostepanenko, V.M., J.Phys.A 13 (1980), 2057.
76. Mamaev, S.G., Mostepanenko, V.M. y Starobinsky, A.A., Sov.Phys.JETP 43 (1976), 823.
77. Fulling, S.A., Parker, L. y Hu, B.L., Phys.Rev.D 10 (1974), 3905.
78. Fulling, S.A., Gen.Rel.Grav. 10 (1979), 807.
79. Misner, C.W., Thorne, K.S. y Wheeler, J.A., "Gravitation", Freeman, San Francisco, 1973.
80. Reed, M. y Simon, B., "Methods of Modern Mathematical Physics", Vol.I, Academic Press (N.Y.), 1972.
81. Roman, P., "Introduction to Quantum Field Theory", North-Holland, Amsterdam, 1968.
82. Boulware, D., Phys.Rev.D 11 (1975), 1404.
83. Fulling, S.A., J.Phys.A 10 (1977), 917.
84. Unruh, W. y Wald, R.M., Phys.Rev., D 29 (1984), 1047.

85. Sánchez,N., Phys.Lett.B 87 (1979),212.
86. Sánchez,N., Phys.Rev.D 24 (1981), 2100.
87. Cattaneo,C., Nuovo Cimento 10 (1958), 318.
88. Moller,C., "The Theory of Relativity", Oxford Press, London, 1952.
89. Hawking,S.W. y Ellis,G.F.R., "The Large Scale Structure of Space-Time", Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
90. Ashtekar,A. y Magnon,A., Proc.R.Soc.London A 346 (1975), 375.
91. Ford,L.H., Phys.Rev. D 14 (1976), 3304.
92. Castagnino,M., Gen.Rel.Grav. 15 (1983), 1149.
93. Charach,Ch. y Parker,L., Phys.Rev.D 24 (1981), 3023.
94. Chitre,D.M. y Hartle,J.B., Phys.Rev.D 16 (1977), 251.
95. Calzetta,E. y Castagnino,M., Phys.Rev.D 28 (1983), 1298.
96. Calzetta,E. y Castagnino,M., Phys.Rev.D 29 (1984), 1609.
97. Castagnino,M. y Mazzitelli,F.D., Phys.Rev.D 31 (1985), 742.
98. Brown,M.R., Ottewill,A.C. y Siklos,S.T.C., Phys.Rev.D 26 (1982), 1881.
99. Castagnino,M. y Ferraro,R., "Observer Dependent Quantum Vacua in Curved Space", Phys.Rev.D (1985), en prensa.
100. Castagnino,M. y Ferraro,R., "Towards a Complete Theory for Unconventional Vacua", Proceedings of the Summer meeting on Quantum Mechanics of Fundamental Systems, Santiago de Chile, 1985, en prensa.
101. Ferraro,R. y Castagnino,M., en "Relativity, Supersymmetry and Cosmology" (Proceedings of the 5th Simposio Latinoamericano de Relatividad y Gravitación), Bariloche, 1985, ed. por O.Bressan, M.Castagnino y V.Hamity, World Scientific, Singapore.
102. Núñez,C.A., Tesis de Doctorado, Univ. Nac. de La Plata, 1984.
103. Castagnino,M. y Núñez,C.A., Memorias de la III Reunión Regional Latinoamericana de Astronomía, Buenos Aires, 1983, Rev.Mexicana Astron.Astrof. 10 (1985), 43.
104. Christensen,S.M., Phys.Rev.D 14 (1976), 2490.

105. Christensen, S.M., Phys.Rev.D 17 (1978), 946.
106. Davies, P.C.W., Fulling, S.A., Christensen, S.M. y Wald, R.M., Ann.Phys.(N.Y.) 109 (1977), 108.
107. Castagnino, M. y Harari, D.D., Ann.Phys.(N.Y.) 152 (1984), 85.
108. Castagnino, M. y Ferraro, R., Ann.Phys.(N.Y.) 161 (1985), 1.
109. Hillas, A.M., "Cosmics Rays", Pergamon, Oxford, 1972.
110. Castagnino, M., Harari, D. y Chimento, L., Phys.Rev.D 24 (1981), 290.
111. Erdélyi, A., Magnus, F., Oberhettinger, F. y Tricomi, F.G., "Higher Transcendental Functions", Bateman Manuscript Project, Vol. 2, Mc Graw-Hill, N.Y., 1953.
112. Abramowitz, M. y Stegun, I., "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards, Applied Math. Series 55, Washington, 1964.
113. Najmi, A.H. y Ottewill, A.C., Phys.Rev.D 30 (1984), 1733.
114. Born, M., Ann.Physik 30 (1909), 1.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los integrantes del Grupo de Teorías Cuánticas Relativistas y Gravitación, que dirige el Dr. Mario Castagnino, por sus comentarios y por el clima de estudio y amistad, que facilitaron este trabajo de investigación.

Quiero agradecer también la hospitalidad brindada por los miembros del Instituto de Astronomía y Física del Espacio.

Esta Tesis fue desarrollada como parte del plan de trabajo de una Beca Interna del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, con lugar de trabajo en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA). Agradezco por ello a las autoridades de ambas instituciones.